幾何的モデル理論入門

モデル理論の代数，数論幾何への応用

板井昌典 著
Itai Masanori

日本評論社

はじめに

モデル理論は数理論理学の 1 分野である．代数学，特に代数幾何学や数論幾何学への，モデル理論の応用について解説するのが本書の目標である．

代数幾何学の基本的定理の 1 つである Hilbert 零点定理を，モデル理論流に証明することから本書の物語は始まる．代数的閉体のモデル理論的性質を利用することによって，非常に見通しのよい証明が得られることに驚かされるだろう．実閉体のモデル理論を展開することによって，Hilbert 第 17 問題をモデル理論を用いて解くことも紹介する．一見互いに何の関連もないこれら 2 つの定理が，モデル理論的には同じ原理で扱えるということは，多くの読者に新鮮な驚きをもたらすに違いない．

とはいえ上記 2 つの例は，すでに代数的方法で証明されている定理の別証明を与えているに過ぎない．

1990 年代前半に事件があった．モデル理論の手法を用いて，数論幾何学の未解決問題が解かれたのである．幾何的 Mordell-Lang 予想と呼ばれる予想である．モデル理論の 1 分野である幾何的安定性理論と呼ばれる理論の成果を駆使し，さらには必要な道具を新たに開発して，E.Hrushovski という新進気鋭のモデル理論研究者が幾何的 Mordell-Lang 予想を肯定的に解いたのである．1993 年 3 月にノートルダム大学 (アメリカ，インディアナ州) で開催された記号論理学会の年会での，学会最高の権威ある「Karp 賞」*) 受賞講演においてであった．

1994 年 9 月にはマンチェスター (イギリス) において Hrushovski のこの結果に関する研究集会が開催された．そのときの講義録が，“*Model Theory and Algebraic Geometry*” という題で出版されている (Lecture Notes in Mathematics 1696 巻，Springer)．Hrushovski の論文 [19] がアメリカ数学会から出版されるのは，1996 年であった．

マンチェスター講義録は Hrushovski の結果を理解するためには非常によい参考文献であることは間違いないが，重要事項の解説がいくつか抜けている．その 1 つが，ザリスキー幾何と呼ばれる構造を用いて，代数的閉体を構成するという点である．こ

*) 5 年に 1 度授与される．1993 年は，E.Hrushovski と A.Wilkie が受賞した．1998 年には E.Hrushovski が単独で受賞している．これまでの受賞者には，S.Shelah も含まれる．

の点を理解するには Hrushovski と Zilber の共著論文 [25] を読む以外に手はない. しかし決して読みやすい論文ではないし，背景を理解しておかなければなかなか読み進めない.「ザリスキー幾何を用いてどうやって代数的閉体を構成するかを解説しよう」と，厚かましくも我が身の非力さを忘れて思いついたのが本書の出発点であった.

Hilbert 零点定理や，Hilbert 第 17 問題をモデル理論的に扱うことから始めて，Hrushovski による幾何的 Mordell-Lang 予想の解決へ向かって読者は読み進むことになる. 短編小説ではなく，長編小説を読むつもりで読んでいただきたい. いわゆる「教科書風」に題材が配置されている訳ではないのだが，重要な結果の多くとは途中で遭遇するはずである.

1 章は，モデル完全性やコンパクト性定理といった基本的道具の解説が中心である. 初めに述べた Hilbert 零点定理と Hilbert 第 17 問題の別証明は，モデル完全性という観点から論じられる. 写像 $f:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ が多項式によって定義されているとする.「f が単射であれば，f は全射である」という J.Ax の定理は，コンパクト性定理を応用することによってあざやかに証明される.

2 章では，整数論に関連した話題を 3 つ取り上げる. 有理数体 $(\mathbb{Q},+,\cdot,0,1)$ の中で整数 $\mathbb{Z}$ が定義されるという J.Robinson の定理はその 1 つであるが，証明は決して自明ではない. 2000 年 7 月に発表された，A.Wilkie による超越数論の定理も，モデル理論を応用した興味ある結果の 1 つである. 整数論のいろいろな定理が必要になるので，知らずしらず整数論入門にもなっている. 他の章から独立した章なので，1 章を飛ばして 2 章を読むことが可能である. また，1 章の後すぐ 3 章に進むことも可能である.

3 章から，幾何的安定性理論の解説が始まる. 本書ではいわゆる「安定性理論」と呼ばれるモデル理論の一般論は展開しないので，幾何的モデル理論という用語を用いる. やや長い章になっているが 3 つの重要な定理が解説されている.

第 1 は，Morley 非可算範疇性定理と呼ばれる 1960 年代半ばに証明された定理である. 論理式の集合を理論，理論で記述された性質を満たす数学的構造をモデルと呼ぶ. T を理論とする. ある非可算濃度 κ に対し，濃度が κ であるような T のモデルは同型を除いて 1 つしかないとする. このとき,「κ だけでなくすべての非可算濃度 λ に対して，濃度が λ であるような T のモデルは，同型を除いて 1 つしかない」

ということを M.Morley が証明した．これが，Morley 非可算範疇性定理である．幾何的安定性理論の出発点になる重要な定理である．

Morley は，定義可能集合の複雑さを計る物差しとして Morley 階数という概念を導入した．Morley 階数 2 の群は可解群であるという Cherlin の定理が第 2 の重要な定理である．

3 つ目は 1-基底群と呼ばれる群に関する基本定理である．1-基底群 G の定義可能集合 X は，有限個の定義可能部分集合 $G_1, \cdots, G_k$ の剰余類 $G_1 + a_1, \cdots, G_k + a_k$ のブール和になっている．1-基底群のこの性質は，幾何的 Mordell-Lang 予想解決の鍵となる．

4 章では，いろいろな構造の中に代数的閉体を定義することが主な関心事である．行列群の中に代数的閉体を定義することから始めて，群図表と呼ばれる図表が存在するような構造を用いて群を定義すること，さらには代数曲線族を用いて代数的閉体を定義することを論じる．

5 章は，ザリスキー幾何入門である．無限集合 X を考える．$X, X^2, X^3, \cdots$ にはそれぞれネーター位相が入っている．代数的閉体上の代数的集合がもつ性質から抽出された公理が成り立っているとき，X をザリスキー幾何と呼ぶ．4 章の結果を用いて，豊富なザリスキー幾何の中に代数的閉体を構成することを示すのが山場である．この結果は，1-基底群の性質と並んで幾何的 Mordell-Lang 予想解決のもう 1 つの重要な鍵である．

6 章は，Hrushovski の仕事の概説である．初めに述べた幾何的 Mordell-Lang 予想解決と Manin-Mumford 予想の別証明の概説をする．1-基底群の基本定理が重要な働きをすることがここにきて納得できるだろう．予め断っておかなければならないが，Hrushovski のこれら 2 つの仕事を完全に紹介するには，本書だけでは不十分である．微分閉体のモデル理論，分離閉体のモデル理論，差分閉体のモデル理論をそれぞれ展開し，安定性理論の一般論ももっと必要になる．また，ザリスキー幾何の一般論もさらに展開しなければならない．

幾何的モデル理論は幾何的 Mordell-Lang 予想の解決だけを目指して発展してきた訳ではない．Morley の定理に端を発する，非可算範疇的理論の性質を解明したいという欲求が原動力である．非可算範疇的理論のモデルは綺麗な内部構造を持つに違

いない．その性質を解明したいという欲求である．

非可算範疇的理論の典型例が，代数的閉体の理論である．代数的閉体のモデルと同じような内部構造を持つモデル M を考える．モデル理論的性質だけを手掛かりに，M を用いて代数的閉体を再構成することができると考えたのが B.Zilber であった．Zilber 予想と呼ばれるこの予想は，残念ながら 1980 年代も最後になって Hrushovski により否定的に解かれた．しかし Zilber の直観はザリスキー幾何と呼ばれる構造に関しては正しかったのである．

群図表から群を構成するという考え方の背景にある，自己同型群を用いて体を構成するということは古典的な結果である．デザルグの定理を満たすような射影平面の自己同型群を用いて体を定義する方法が，E.Artin の名著 “*Geometric Algebra*” の 2 章に詳述されている．

モデル理論的性質を手掛かりに体を構成したいという問題意識で 4 章と 5 章は書かれている．体の構造が透けてみえる構造に体を再構成するところから始める．最後には，ネーター位相が与えられただけのザリスキー幾何と呼ばれる空間で議論する．およそ体の構造などどこを探しても見当たらないような状況下で，体を作り上げるという手品を堪能していただきたい．

謝辞： 本書の企画は，2000 年 3 月 6 日から 10 日まで兵庫県城崎市の城崎福祉会館で開催された研究集会「ロジックと代数幾何 — モーデル・ラング予想をめぐって —」が契機になっています．幹事の森脇淳さんにあらためてお礼を申し上げます．

セミナーや勉強会で日頃お世話になっている，池田宏一郎，岡本圭史，桔梗宏孝，田中克己，玉江伸成，坪井明人，福崎賢治，前園久智，村上雅彦，米田郁生，若井健太郎の各氏に感謝します．各氏による誤りの指摘やコメントが，本書の随所に活かされています．

日本評論者の高橋健一さんには大変お世話になりました．当初の予定より大幅に遅れてしまったにもかかわらず，辛抱強く見守っていただいたことを感謝します．

2002 年 7 月 31 日

板井昌典

目　次

はじめに　i

1　モデル理論とは　1

1.1 Hilbert 零点定理 1

1.2 モデル完全な理論 3

1.3 Hilbert 第 17 問題 16

1.4 量記号消去 20

1.5 代数的閉体のタイプ 31

1.6 コンパクト性定理 33

1.7 M^{eq} という考え方と仮想元消去 38

2　整数論との交流　44

2.1 Lagrange の 4 平方数定理 44

2.2 $\mathbb{Z}$ は $(\mathbb{Q},+,\cdot,0,1)$ の中で定義可能である 46

2.3 Wilkie の定理と Schanuel 予想 57

3　幾何的モデル理論　63

3.1 強極小集合 63

3.2 Morley 階数 75

3.3 ω-安定理論 86

3.4 Morley の非可算範疇性定理と Baldwin-Lachlan の定理 94

3.5 タイプの標準基底 105

3.6 ω-安定群と Cherlin の定理 110

3.7 連結な 1-基底群は可換群である 130

4　体を再構成する　137

4.1 行列を使って 137

4.2 群の中に体を見つける 140

4.3 群図表 146

4.4 強極小集合に作用する群によって定義される体 156
4.5 代数曲線族から体を再構成する 172
5 ザリスキー幾何 182
5.1 ザリスキー幾何入門 183
5.2 ザリスキー幾何のモデル理論 195
5.3 豊富なザリスキー幾何と体 210
5.4 体の純粋性 226
5.5 大団円 243
5.6 ザリスキー幾何の例：微分閉体と分離閉体の階数 1 の集合 246
6 E.Hrushovski の仕事 251
6.1 幾何的 Mordell-Lang 予想と Manin-Mumford 予想 251
6.2 幾何的 Mordell-Lang 予想の解決 253
6.3 Manin-Mumford 予想の新しい証明 259
A 予備知識 262
A.1 基本的な定義 262
A.2 基本的ないくつかの定理 266
A.3 術語とその翻訳に関する注意 268
B 文献ノート 270
B.1 標準的教科書 270
B.2 いくつかの話題 272
B.3 Hrushovski の仕事について 273
参考文献 274
索引 278

1

モデル理論とは

モデル理論では，論理式を用いて定義される集合の性質を研究する．多項式で定義される代数的集合の性質を研究する代数幾何学の一般化とも見なすことができる．

モデル理論は代数的閉体 $\mathbb{C}$ や実数体 $\mathbb{R}$ の性質を抽象化するところから始まっている．代数学の有名かつ重要な定理をモデル理論的手法を用いて証明しつつ，抽象的な枠組みがどのように活躍するかを実感してほしい．

1.1 Hilbert 零点定理

1950 年の国際数学者会議において数理論理学から代数への寄与を示唆した A.Robinson は，Hilbert の有名な零点定理の別証明を与えている．モデル理論的論法に着目してその方法を紹介する．

定理 1.1 (弱い形の Hilbert 零点定理) F を代数的閉体とし，p を $F[X_1, \cdots, X_n]$ の素イデアルとする．このとき，

$$V_F(p) = \{(a_1, \cdots, a_n) \in F^n : \forall f \in p\ f(a_1, \cdots, a_n) = 0\} \neq \varnothing$$

である．

証明　基本方針： $V_F(p) \neq \varnothing$ であることを示すのであるが，$\mathfrak{M} \supseteq p$ であるような極大イデアル $\mathfrak{M}$ に対して，$V_F(\mathfrak{M}) \subseteq V_F(p)$ だから，$V_F(\mathfrak{M})$ が空集合でないことを示せばよい．

ここですこし視野を広げて，$F \subseteq K$ なる代数的閉体 K で $V_K(\mathfrak{M}) \neq \varnothing$ であることを示す．実はこのような K は簡単に見つかる．

F の拡大体 $F[X_1,\cdots,X_n]/\mathfrak{M}$ において $x_i = X_i \pmod{\mathfrak{M}}$ とおくと，任意の $f(X_1,\cdots,X_n)\in\mathfrak{M}$ に対して，$f(x_1,\cdots,x_n)\in\mathfrak{M}$ が成り立つ．つまり，$F[X_1,\cdots,X_n]/\mathfrak{M}$ において $f(x_1,\cdots,x_n)=0$ となる．よって $F[X_1,\cdots,X_n]/\mathfrak{M}$ の代数的閉包を K とすれば $V_K(\mathfrak{M})\neq\varnothing$ である．

$V_K(\mathfrak{M})\neq\varnothing$ から $V_F(\mathfrak{M})\neq\varnothing$ を示せば話は終る．代数幾何学では次のように議論を展開する．まず，$F[X_1,\cdots,X_n]/\mathfrak{M}$ が F 上有限生成であることから，実は $F[X_1,\cdots,X_n]/\mathfrak{M}$ が F 上代数的であることを示す．この部分の証明がキーポイントである．$F[X_1,\cdots,X_n]/\mathfrak{M}$ が F 上代数的であることが分かってしまえばあとは簡単である．仮定から F が代数的閉体であることから $F[X_1,\cdots,X_n]/\mathfrak{M}=F$ であることが分かる．よって，$V_F(\mathfrak{M})\neq\varnothing$ が証明された．一方モデル理論では次のように議論を進める．

モデル理論の考え方： Hilbert の基底定理により，$\mathfrak{M}$ は有限個の多項式 $f_1,\cdots,f_l$ で生成されている．多項式 $f_1,\cdots,f_l$ を用いると，$V_K(\mathfrak{M})\neq\varnothing$ ということを論理式で表現することができる．すなわち，論理式

$$(\exists v_1)\cdots(\exists v_n)(f_1(v_1,\cdots,v_n)=0\wedge\cdots\wedge f_l(v_1,\cdots,v_n)=0)$$

を φ とおくと，

$$V_K(\mathfrak{M})\neq\varnothing\Longleftrightarrow K\models\varphi$$

である．多項式 $f_1,\cdots,f_l$ の各係数は F の元だから，論理式 φ は言語 $L(F)$ の論理式である．ここで 2 つの代数的閉体 F, K が良く似た性質を持っていることに着目する．つまり F の元をパラメーターとして含む論理式で表現できる性質に関して，F で成り立つことと K で成り立つことが同値であるという性質，すなわち F が K の初等部分モデルになっていることに着目する．したがって，

$$F\models(\exists v_1)\cdots(\exists v_n)(f_1(v_1,\cdots,v_n)=0\wedge\cdots\wedge f_l(v_1,\cdots,v_n)=0)$$

つまり論理式 φ は F でも成り立っているので，$V_F(\mathfrak{M})\neq\varnothing$ が成り立つ．□

モデル理論による議論のキーポイントは，2 つの代数的閉体 $F\subseteq K$ は一階の述語論理式で表現される性質に関して同じものが成り立っているということである．ただし，F の元はパラメーターとして用いてよいとする．この性質は，**モデル完全性**と呼ばれ，次節でこの性質を詳しく調べる．

1.2　モデル完全な理論

群，環や体といった数学的構造の持つ性質を論理式で表現することができる．群や体の公理を論理式で書くのはたやすい．代数的閉体の性質を，環の言語 $L_r = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ を用いた論理式で書いてみる．

(1) 体の公理を書く．

(i) $\forall x \forall y(x + y = y + x)$,

(ii) $\forall x \forall y \forall z(x + (y + z) = (x + y) + z)$,

(iii) $\forall x(x + 0 = x)$,

(iv) $\forall x(x + (-x) = 0)$,

(v) $\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$,

(vi) $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$,

(vii) $\forall x(x \cdot 1 = x)$,

(viii) $\forall x \exists y((x = 0) \vee x \cdot y = 1)$,

(ix) $0 \neq 1$.

(2) 各自然数 n に対して，n 次方程式が解を持つことを 1 個の論理式で書く．しかし，代数的閉体であるためにはこれらすべての論理式が正しいことが必要である．すなわち各自然数 n ごとに次の文を書く．

$$\forall y_1 \cdots \forall y_n \exists x(x^n + y_1 \cdot x^{n-1} + \cdots + y_{n-1} \cdot x + y_n = 0)$$

(3) 標数を決める：標数が p であることを主張するには 1 個の文で足りるが，標数 0 を主張するには無限個の文が必要である．すなわち，標数 p であることは，1 個の文 $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p\text{ 個}} = 0$ で書ける．標数が 0 であることは，すべての素数 p に対して，文 $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p\text{ 個}} \neq 0$ を書く．

これら無限個の文の集合を ACF_p と書くことにする．標数 p の体では，ACF_p の各文が成り立ち，ACF_p の各文が成り立つような体は，標数 p の代数的閉体である．

標数が等しい 2 つの代数閉体 $F \subset K$ は，$F \prec K$ であった．これは非常に扱い易い性質である．

定義 1.2　T を理論とする．T の任意のモデル A, B に対して，$A \subset B$ ならば $A \prec B$ が成り立つとき，理論 T を**モデル完全**と呼ぶ．

Hilbert の零点定理を証明するときに，ACF_p がモデル完全であることを用いた．この証明は次のように行う．

定理 1.3　ACF_p はモデル完全である．

証明　$A \subset B \models \mathrm{ACF}_p$ とする．$A \prec B$ を示したい．上方 Löwenheim-Skolem 定理より，$A \prec A^*$, $B \prec B^*$ となる代数的閉体 A^*, B^* が存在する．$|A^*| = |B^*|$ かつ $|B| < |B^*|$ となるようにできる．A^* と B^* はともに非可算集合なので，素体上の超越次数は同じである．よって，Steinitz の定理から，A^* と B^* は (素体上) 同型である．

さて，$\varphi(y, x_1, \cdots, x_n)$ を量記号を含まない L-論理式，$a_1, \cdots, a_n$ を A の元とする．$B \models \exists y \varphi(y, \bar{a})$ とすると $B \models \varphi(m, \bar{a})$ となる m が A に存在することを示す．

$B \models \exists y \varphi(y, \bar{a})$ とすると $B \prec B^*$ より $B^* \models \exists y \varphi(y, \bar{a})$ である．A^* と B^* は素体上同型だから，$A^* \models \exists y \varphi(y, \bar{a})$ である．ここで，$\varphi(y, \bar{x})$ は L-論理式であり，$a_1, \cdots, a_n \in A$ なので $A \prec A^*$ であることから $A \models \varphi(m, \bar{a})$ となる m が A に存在する．$\varphi(y, \bar{x})$ は量記号を含まないから $B \models \varphi(m, \bar{a})$ である．したがって Tarski-Vaught テストにより $A \prec B$ である．□

この証明だと，重要事項はすべて Steinitz の定理に帰着されると言っても過言ではない．したがって零点定理の別証明において，どのようにどの程度モデル理論が寄与しているかがよく分からない．よりモデル理論的な証明は後で与えることにするが，その前に代数的閉体の理論がモデル完全であるという事実を一般化してみよう．

まず，文の集合としての ACF_p に属する各論理式の形を考える．それらはすべて，$\forall(\cdots)$ または $\forall\exists(\cdots)$ の形をしていることに注意してほしい．このような理論を Π_2-理論という．したがって ACF_p は Π_2-理論である．

モデル完全な ACF_p が Π_2-理論であることは偶然ではないのである．モデル完全的であるということと，Π_2-理論であるということの相互関係について次に調べる．まず簡単な練習問題を解いておこう．

問題 1 L を言語，M, N を L-構造とし，M は N の部分構造であるとする．$\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$ を量記号を含まない L-論理式とする．さらに，$m_1, \cdots, m_n \in M$ とする．

(1) $M \models \exists x \varphi(x, m_1, \cdots, m_n)$ ならば，$N \models \exists x \varphi(x, m_1, \cdots, m_n)$ である．

証明 $M \models \exists x \varphi(x, m_1, \cdots, m_n)$ とすると，$M \models \varphi(a, m_1, \cdots, m_n)$ となる $a \in M$ が存在する．M は N の部分構造であり，$\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$ は量記号を含まないので，$N \models \varphi(a, m_1, \cdots, m_n)$ である．よって $N \models \exists x \varphi(x, m_1, \cdots, m_n)$ である．□

(2) $N \models \forall x \varphi(x, m_1, \cdots, m_n)$ ならば $M \models \forall x \varphi(x, m_1, \cdots, m_n)$ である．

証明 練習問題とする．□

補題 1.4 L を言語とする．$\varphi(x, y, z_1, \cdots, z_n)$ を量記号を含まない L-論理式とする．L-構造の列，

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_i \subseteq \cdots \quad (i \in \omega)$$

を考える．$B = \bigcup_{i \in \omega} A_i$ とおく．$a_1, \cdots, a_n \in A_0$ に対し，

$$A_i \models \forall x \exists y \varphi(x, y, a_1, \cdots a_n)$$

がすべての $i \in \omega$ に対して成り立っているとする．このとき

$$B \models \forall x \exists y \varphi(x, y, a_1, \cdots a_n)$$

である．よって，T が Π_2-理論ならば，T のモデルたちの任意の上昇列の和集合は T のモデルである．

証明 $b \in B$ を任意の元とすると，$b \in A_i$ となる $i \in \omega$ が存在する．仮定から $A_i \models \varphi(b, b', a_1, \cdots, a_n)$ となる $b' \in A_i$ が存在する．$A_i \subseteq B$ なので $B \models \varphi(b, b', a_1, \cdots a_n)$，よって $B \models \exists y \varphi(b, y, a_1, \cdots a_n)$ である．b は B の任意の元だったので $B \models \forall x \exists y \varphi(x, y, a_1, \cdots a_n)$ が成り立つ．□

さて準備が整ったので，モデル完全性と Π_2-理論との関係を考える．

補題 1.5 (**A.Robinson**) L を言語，T を L-理論とする．T がモデル完全ならば，T は Π_2-理論と同値である．

証明　$M_0 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq \cdots$ を T のモデルの列とすると，T はモデル完全なので

$$M_0 \preceq \cdots \preceq M_i \preceq \cdots$$

である．よって $\bigcup_{i\in\omega} M_i$ も T のモデルである．すなわち，T のモデルたちのどんな上昇列も，和集合に関して閉じていることが分かった．

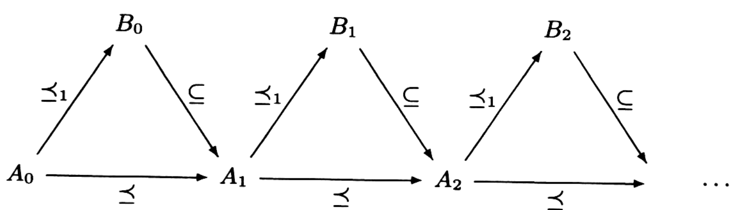
$$\Phi = \{\phi : \phi \text{ は } \Pi_2\text{-文かつ } T \vdash \phi\}$$

とおく．定義から，任意の $\phi \in \Phi$ に対して，$T \vdash \phi$ だから $T \vdash \Phi$ である．よって，$\Phi \vdash T$ であることを示せば T と Π_2-理論 Φ が同値になる．したがって $\Phi \models T$ であることを示す．すなわち，$A \models \Phi$ とすると，$A \models T$ であることを示せばよい．このために，T のモデルの上昇列

$$B_0 \subseteq \cdots \subseteq B_i \subseteq \cdots$$

を定義し，$A \preceq \bigcup_{i\in\omega} B_i$ を証明する．T はモデル完全なので，$\bigcup_{i\in\omega} B_i \models T$ である．よって $A \models T$ となって証明が完結する．

A を Φ の任意のモデルとする．$A = A_0$ とおき，Φ のモデルたちの初等拡大の列 $(A_i : i < \omega)$，各 i に対して，$A_i \preceq_1 B_i$ かつ $B_i \subseteq A_{i+1}$ となっている T のモデル B_i を定義する．



モデル A_0 で成り立つ $L(A_0)$-文で Π_1 の形をしたもの全体を $\Pi_1(A_0)$ とおく．

主張： $T \cup \Pi_1(A_0)$ は無矛盾である．

もし $T \cup \Pi_1(A_0)$ が矛盾しているとすると，コンパクト性定理から，有限個の $\varphi_1, \cdots, \varphi_l \in \Pi_1(A_0)$ が存在して，$T \cup \{\varphi_1, \cdots, \varphi_l\}$ が矛盾する．よって

$$T \vdash \neg\varphi_1 \vee \cdots \vee \neg\varphi_l$$

したがって

$$T \vdash \neg(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_l)$$

$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_l)$ は $\Pi_1(A_0)$-文なので，$T \vdash \neg\varphi$ $(\varphi \in \Pi_1(A_0))$ と考えて議論する．φ に現れる $L(A_0)\backslash L$ の定数記号を $a_1, \cdots, a_s$ とすると，

$$T \vdash \neg\varphi(a_1, \cdots, a_s) \text{ かつ } A_0 \models \varphi(a_1, \cdots, a_s)$$

である．$a_1, \cdots, a_s$ は L にない定数記号なので，

$$T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_s \neg\varphi(x_1, \cdots, x_s)$$

である．$\neg\varphi(x_1, \cdots, x_s)$ は Σ_1-論理式なので $A_0 \models \forall x_1 \cdots \forall x_s \neg\varphi(x_1, \cdots, x_s)$，したがって $A_0 \models \neg\varphi(a_1, \cdots, a_s)$ となって矛盾する．よって $T \cup \Pi_1(A_0)$ は無矛盾である．

$T \cup \Pi_1(A_0)$ のモデル (の言語 L への制限) を B_0 とすると，$A_0 \preceq_1 B_0$ となっている．

次に A_1 を定義するために $\mathrm{Diag}(A_0) \cup \mathrm{Diag}_0(B_0)$ が無矛盾であることを示す．もし矛盾したとすると，上の議論と同様に，L-論理式 $\varphi(x, y)$ と $a \in A_0$, $b \in B_0\backslash A_0$ が存在して，

$$\mathrm{Diag}(A_0) \vdash \neg\varphi(a, b) \text{ かつ } B_0 \models \varphi(a, b)$$

が成り立つ．$b \in B_0\backslash A_0$ なので $\mathrm{Diag}(A_0) \vdash \forall y \neg\varphi(a, y)$．よって $A_0 \models \forall y \neg\varphi(a, y)$．ところが $A_0 \preceq_1 B_0$ だから $B_0 \models \forall y \neg\varphi(a, y)$，よって $B_0 \models \neg\varphi(a, b)$ となって矛盾する．よって $\mathrm{Diag}(A_0) \cup \mathrm{Diag}_0(B_0)$ は無矛盾である．A_1 を $\mathrm{Diag}(A_0) \cup \mathrm{Diag}_0(B_0)$ のモデルとすると，$B_0 \subseteq A_1$, $A_1 \models \Phi$ かつ $A_0 \preceq A_1$ である．

あとは，帰納的に A_i が定義されたら，$A_i \preceq_1 B_i$ となる T のモデル B_i をつくり，B_i を用いて，$B_i \subseteq A_{i+1}$ となっている A_i の初等拡大 A_{i+1} を定義する．

このようにして，Φ のモデルの初等拡大列 $(A_i : i < \omega)$ と T のモデルの拡大列 $(B_i : i < \omega)$ を定義する．構成方法から明らかに $\bigcup_{i<\omega} A_i = \bigcup_{i<\omega} B_i$ である．

$A_0 \preceq \bigcup_{i<\omega} A_i$ であり，T はモデル完全なので $\bigcup_{i<\omega} B_i \models T$ である．よって $A_0 \models T$ となって証明が終わる．□

よってモデル完全な理論は Π_2-文を用いて公理化されていると考えてよいことが分かる．モデル完全な理論の特徴付けとして次の性質を得る．

定理 1.6 (モデル完全な理論の特徴付け)　T を言語 L の理論とする．次の各条件は同値である．

(1) T はモデル完全である．

(2) T の任意のモデル $M \models T$ に対して，$T \cup \mathrm{Diag}_0(M)$ は完全な $L(M)$-理論である．

(3) 任意の論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ に対して Σ_1-論理式 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ が存在して，

$$T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \longleftrightarrow \psi(\bar{x}))$$

である．

証明　((1) $\Longrightarrow$ (2))　N_1, N_2 を $T \cup \mathrm{Diag}_0(M)$ のモデルとする．N_1, N_2 は $L(A)$-構造である．これを L-構造と考えると $M \subseteq N_1$ かつ $M \subseteq N_2$ になっているとしてよい．T はモデル完全なので $M \preceq N_1$ かつ $M \preceq N_2$ である．φ を任意な $L(M)$-文とする．

$$\begin{aligned} N_1 \models \varphi &\Longleftrightarrow M \models \varphi \\ &\Longleftrightarrow N_2 \models \varphi \end{aligned}$$

である．よって N_1 と N_2 は $L(M)$-構造として初等同値である．よって $T \cup \mathrm{Diag}_0(M)$ は完全な $L(M)$-理論である．

((2) $\Longrightarrow$ (3))　これが一番重要な部分である．$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ を L-論理式とする．これと同値な Σ_1-論理式が存在することを示したい．新たな定数記号 $c_1, \cdots, c_n$ を L に付け加えた言語を L_1 とし，L_1-文の集合，

$$S_0 = \{\neg\psi(c_1, \cdots, c_n) : \psi(\bar{x}) \text{ は } \Sigma_1\text{-論理式で } T \vdash \forall \bar{x}(\psi(\bar{x}) \longrightarrow \varphi(\bar{x}))\}$$

を考え，$S = T \cup \{\varphi(c_1, \cdots, c_n)\} \cup S_0$ とおく．

主張：S は矛盾している　もし S が無矛盾だとするとモデル M を持つ．よって各 c_i の解釈 $m_i \in M$ が存在して

$$M \models \varphi(c_1, \cdots, c_n)$$

である．M を L-構造と考え T のモデルとみなす．仮定から $T \cup \mathrm{Diag}_0(M)$ は完全な $L(M)$-理論である．$\varphi(c_1, \cdots, c_n)$ を $L(M)$-文とみることができるから

$T \cup \mathrm{Diag}_0(M) \vdash \varphi(c_1, \cdots, c_n)$ と考えてよい．よって述語論理の基本定理から $\mathrm{Diag}_0(M)$ に属す有限個の文の論理積，$\eta(c_1, \cdots, c_n, \underline{a_1}, \cdots, \underline{a_l})$ が存在して，

$$T \vdash \eta(c_1, \cdots, c_n, \underline{a_1}, \cdots, \underline{a_l}) \longrightarrow \varphi(c_1, \cdots, c_n)$$

である．ここで各 $\underline{a_j}$ は $a_j \in M \backslash \{m_1, \cdots, m_n\}$ に対応する $L(M)$ の定数記号である．$c_1, \cdots, c_n, \underline{a_1}, \cdots, \underline{a_l}$ は L に入っていない定数記号なので，

$$T \vdash \exists \bar{y} \eta(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow \varphi(\bar{x})$$

である．よって，

$$T \vdash \forall \bar{x}(\exists \bar{y} \eta(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow \varphi(\bar{x}))$$

である．よって $\neg \exists \bar{y} \eta(c_1, \cdots, c_n, \bar{y}) \in S_0$ である．M は S のモデルだったから，

$$M \models \neg \exists \bar{y} \eta(c_1, \cdots, c_n, \bar{y})$$

が成り立つ．一方，$\eta(c_1, \cdots, c_n, \underline{a_1}, \cdots, \underline{a_l}) \in \mathrm{Diag}_0(M)$ だったから，

$$M \models \exists \bar{y} \eta(c_1, \cdots, c_n, \bar{y})$$

であるので矛盾した．よって S は矛盾している．

S が矛盾しているということは $\{\varphi(c_1, \cdots, c_n)\} \cup S_0$ が T のもとで矛盾していることを意味するから，コンパクト性定理より，有限個の $\psi_1(\bar{c}), \cdots, \psi_k(\bar{c}) \in S_0$ が存在して，

$$T \vdash \varphi(\bar{c}) \longrightarrow (\psi_1(\bar{c}) \vee \cdots \vee \psi_k(\bar{c}))$$

が成り立っている．よって

$$T \vdash \varphi(\bar{c}) \longleftrightarrow (\psi_1(\bar{c}) \vee \cdots \vee \psi_k(\bar{c}))$$

各 $\psi_i(\bar{x})$ は Σ_1-論理式なので，$\psi_1(\bar{x}) \vee \cdots \vee \psi_k(\bar{x})$ も Σ_1-論理式である．

$$T \vdash \forall \bar{x} \, (\varphi(\bar{x}) \longleftrightarrow (\psi_1(\bar{x}) \vee \cdots \vee \psi_k(\bar{x})))$$

なので，$\varphi(\bar{x})$ は Σ_1-論理式と同値である．

((3) $\Longrightarrow$ (1)) $M \subseteq N$ を T のモデルとする．$M \preceq N$ を示したい．$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ を L-論理式，$m_1, \cdots, m_n \in M$ とする．

$$M \models \varphi(m_1, \cdots, m_n) \iff N \models \varphi(m_1, \cdots, m_n)$$

を示せばよい．仮定から，$\varphi(\bar{x})$ は $\exists y_1 \cdots \exists y_l \psi(\bar{x}, \bar{y})$ の形をしていて，しかも $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ は量記号を含んでいない．よって，

$$\begin{aligned} M \models \varphi(m_1, \cdots, m_n) &\Longrightarrow M \models \psi(\bar{m}, \bar{a}) \quad (\text{ある } a_1, \cdots, a_l \in M) \\ &\Longrightarrow N \models \psi(\bar{m}, \bar{a}) \quad (M \subseteq N \text{ なので}) \\ &\Longrightarrow N \models \varphi(\bar{m}) \end{aligned}$$

同じく仮定から，$\neg\varphi(\bar{x})$ も $\exists z_1 \cdots \exists z_k \eta(\bar{x}, \bar{z})$ の形をしていて $\eta(\bar{x}, \bar{z})$ は量記号を含んでいない．よって

$$\begin{aligned} M \models \neg\varphi(m_1, \cdots, m_n) &\Longrightarrow M \models \eta(\bar{m}, \bar{b}) \quad (\text{ある } b_1, \cdots, b_k \in N) \\ &\Longrightarrow N \models \eta(\bar{m}, \bar{b}) \quad (M \subseteq N \text{ なので}) \\ &\Longrightarrow N \models \neg\varphi(\bar{m}) \end{aligned}$$

よって，$N \models \varphi(\bar{m}) \Longrightarrow M \models \varphi(\bar{m})$ である．　□

上の証明ではコンパクト性定理が重要な働きをする．この種の議論に慣れるためにここで練習問題を 1 つ．

問題 2　T を L-理論，φ を L-文とする．さらに $\Sigma = \{\psi_i : i \in \omega\}$ を L-文の無限集合とする．T の任意のモデル M に対して，$i \in \omega$ が存在して

$$M \models \varphi \longrightarrow \psi$$

が成り立っているとする．このとき Σ の有限部分集合 Σ_0 が存在して，

$$T \vdash \varphi \longrightarrow \vee \Sigma_0$$

である．ただし，$\vee \Sigma_0$ は Σ_0 に属すすべての L-文の論理和とする．

理論 T がモデル完全かどうかを判定する，Robinson の判定法と呼ばれる方法がある．証明は簡単なので，練習問題としよう．

問題 3 (Robinson の判定法)　T を L-理論とする．T がモデル完全であるための必要十分条件は，T の任意のモデル $M \subset N$ に対して，$M \preceq_1 N$ が成り立つこと

である．すなわち，L の任意の $\exists$-論理式 $\varphi(\bar{x})$ と $\bar{m} \in M$ に対して

$$N \models \varphi(\bar{m}) \Longrightarrow M \models \varphi(\bar{m})$$

が成り立つことである．

代数的閉体の理論をモデル理論的に分析しながら上にのべたような性質を得た訳であるが,「代数的閉体」そのものをモデル理論的に一般化してみよう．

定義 1.7 L を言語，A を L-構造とする．任意の Σ_1-論理式 $\varphi(\bar{x})$, $\bar{a} \in A$，L-構造 $A \subseteq B$ に対して，

$$B \models \varphi(\bar{a}) \Longrightarrow A \models \varphi(\bar{a})$$

が成り立つとき，A は Σ_1-論理式に関して閉じているという．

問題 4 $A \subseteq B$ をともに L-構造とする．A が Σ_1-論理式に関して閉じていれば $A \preceq_1 B$ である．

体の理論で考えた場合,「Σ_1-論理式に関して閉じた体」という概念と,「代数的閉体」という概念は完全に一致する．このことをさらに一般化すると次の命題が得られる．

命題 1.8 T を L-理論とする．次の 2 つの命題は同値である．

(1) T はモデル完全である．

(2) T の任意のモデルは Σ_1-論理式に関して閉じている．

証明 ((1) $\Longrightarrow$ (2)) $M \models T$ とする．M が $\exists_1$-論理式に関して閉じていることを示す．$\exists y\varphi(x,y)$ を $\exists_1$-論理式とする．$M \subseteq N \models T$ とし $m \in M$ に対して $N \models \exists y\varphi(m,y)$ が成り立っているとする．T はモデル完全なので $M \preceq N$ である．よって $M \models \exists y\varphi(m,y)$ である．

((2) $\Longrightarrow$ (1)) $A \subseteq B \models T$ とすると，A は Σ_1-論理式に関して閉じているので $A \preceq_1 B$ である．Robinson の判定法，あるいは直接 Tarski-Vaught の判定法から $A \preceq B$ である．よって T はモデル完全である． □

モデル完全な理論は，Π_2-理論と考えてよいことはすでに証明したが，逆はどうだろうか．Π_2-理論はモデル完全だろうかという疑問が当然生じる．このため Π_2-理論がモデル完全になるかどうかの判定法として，次の定理がある．

定理 1.9 (Lindström のテスト)　T を L-理論とする．

(1) T は Π_2-理論である．

(2) すべてのモデルは無限である．

(3) T はある無限基数 $\lambda \geq |L|$ に対して，λ-範疇的，すなわち濃度 λ を持つモデルはすべて同型である．このとき，T はモデル完全である．

証明　背理法で示す．T のモデル $M \subset N$ で $M \preceq_1 N$ になっていないものがあったとしよう．L の $\exists$-論理式 $\varphi(\bar{x})$ と $\bar{m}$ が存在して $N \models \varphi(\bar{m})$ は成り立っているが，$M \models \neg\varphi(\bar{m})$ である．言語 L に 1 変数述語記号 P を付け加えた言語を L^+ とする．集合 M を P の解釈とするように，モデル N を L^+-構造 N^+ へと拡張する．$T^+ = \mathrm{Th}(N^+)$ とおく．$\varphi(\bar{m})$ は N では成り立っているが M では成り立っていないから，$\varphi(\bar{x})$ の各変数 x_i に対して $P(x_i)$ という条件を付けた文 $\varphi^P(\bar{x})$ を考えると，L^+ の文

$$\exists\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \wedge \neg\varphi^P(\bar{x})) \qquad (*)$$

は T^+ に入っていることが分かる．

$|L^+| \leq \lambda$ であり T のモデルはすべて無限なので，コンパクト性定理から T^+ のモデル K^+ で

$$|K^+| = \lambda \text{ かつ } |\{x \in K^+ : K^+ \models P(x)\}| = \lambda$$

を満たしているものが存在する．K^+ を L-構造に制限したものを K と書く．$K^+ \equiv N^+$ だから，L-構造 H で，

$$H \subset K \text{ かつ } H = \{x \in K^+ : K^+ \models P(x)\}$$

となっているものが存在する．また $H \models T$ かつ $|H| = \lambda$ である．

ところで，濃度 λ を持つ T のモデルで代数的に閉じたものが存在する (証明は演習問題)．T は λ-範疇的なので H は代数的に閉じている．よってすべての $\bar{h} \in H$ に対して

$$K \models \varphi(\bar{h}) \Longrightarrow H \models \varphi(\bar{h})$$

である．ところが K^+ は T^+ のモデルであり，T^+ には文 $(*)$ が入っているので矛盾する．よって T はモデル完全である．　□

例 1.10 T のモデル M で，$|M|=\lambda$ かつ M は Σ_1-論理式に関して閉じているものが存在することを証明せよ．

証明 実は，任意の無限基数 κ に対して，$M \models T$, $|M|=\kappa$ かつ M は Σ_1-論理式に関して閉じているものが存在する．

N_0 を T の任意のモデルとし，$|N_0|=\kappa$ とする．N_0 の元をパラメーターとするすべての Σ_1-論理式の解を N_0 に付け加えたモデルを N_1 とする．以下 N_i の元をパラメーターとするすべての Σ_1-論理式の解を N_i に付け加えたモデルを N_{i+1} とする．このようにして T のモデルの拡大列

$$N_0 \subseteq \cdots \subseteq N_i \subseteq \cdots$$

を定義する．ここで各 N_i の濃度は κ であるようなものが存在する．$M=\bigcup_{i\in\omega} N_i$ を考えると，T は Π_2-理論なので $M \models T$ である．M が Σ_1-論理式に関して閉じていて濃度が κ であることも分かる． □

定義 1.11 T を L-理論，$\varphi(\bar{x})$ を Σ_1-論理式とする．

$$\mathrm{Res}_\varphi(\bar{x}) = \{\psi(\bar{x}) \text{ は } \Pi_1\text{-論理式 } : T \vdash \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \longrightarrow \psi(\bar{x}))\}$$

を $\varphi(\bar{x})$ の終結式 (Resultant) と呼ぶ．

Σ_1-論理式 $\varphi(\bar{x})$ を Π_1-論理式たちで「上から近似」しているのが Res_φ である．$\psi(\bar{x}) \in \mathrm{Res}_\varphi$ とする．$\varphi(\bar{x})$ と $\psi(\bar{x})$ の解の集合をそれぞれ A, B とすると (万有モデルで) $A \subseteq B$ となっているからである．$\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{Res}_\varphi$ であるとき，$\psi_1 \wedge \psi_2 \in \mathrm{Res}_\varphi$ であることに注意しよう．

補題 1.12 T を L-理論，A を L-構造とする．$\varphi(\bar{x})$ を Σ_1-論理式，$\bar{a} \in A$ とする．次の 2 つの性質は同値である．

(1) T のモデル B で，$A \subseteq B$ かつ $B \models \varphi(\bar{a})$ を満たすものが存在する．

(2) $\mathrm{Res}_\varphi(\bar{x})$ に属す任意の Π_1-論理式 $\psi(\bar{x})$ に対して，$A \models \psi(\bar{a})$ が成り立つ．このことを $A \models \bigwedge \mathrm{Res}_\varphi(\bar{a})$ と書く．

証明 ((1) $\Longrightarrow$ (2)) $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{Res}_\varphi$ とする．仮定から，$B \models \varphi(\bar{a})$ である．$B \models T$ なので $B \models \psi(\bar{a})$ である．ψ は Π_1-論理式なので $A \models \psi(\bar{a})$ である．

((2) $\Longrightarrow$ (1))　対偶を示す．(1) が成り立たないとすると，

$$T \cup \mathrm{Diag}(A) \cup \{\varphi(\bar{a})\}$$

は矛盾する．したがってコンパクト性定理から，量記号を含まない L-論理式 $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ と A の元の列 $\bar{b}$ が存在して，

$$A \models \theta(\bar{a}, \bar{b}) \text{ かつ } T \vdash \varphi(\bar{a}) \longrightarrow \neg\theta(\bar{a}, \bar{b})$$

よって

$$T \vdash \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \longrightarrow \forall\bar{y}\neg\theta(\bar{x}, \bar{y}))$$

である．よって論理式 $\forall\bar{y}\neg\theta(\bar{x}, \bar{y})$ は Res_φ に属す．(2) が成り立つとすると $A \models \forall\bar{y}\neg\theta(\bar{a}, \bar{y})$ であり，$A \models \neg\theta(\bar{a}, \bar{b})$ となって矛盾する．よって (2) は成り立たない．

□

可換環のなかの冪零元： さて，R を可換環，r を R の元とする．

$$\text{ある正整数 } n \text{ が存在して } r^n = 0$$

が成り立つとき，r を**冪零元**であるという．本書で扱うモデル理論では,「$\exists n \in \mathbb{N}$」とか「$\forall n \in \mathbb{N}$」という量記号は扱うことができない．しかし可換環 R が Σ_1-論理式に関して閉じている場合は,「冪零元である」という性質を一階の論理式で書くことが可能になることを解説しよう．まず「冪零元でない」という性質と「ある拡大環で，冪等元の因子になっている」という性質が同値であることを確認しておく．

補題 1.13　R_1 を可換環とする．$a \in R_1$ を元とする．次の 2 つの性質は同値である．

(1) a は冪零元でない．すなわち，$\forall n < \omega\ (a^n \neq 0)$ である．

(2) R_1 の拡大環 R_2 が存在して，

$$R_2 \models \exists z(az \neq 0 \wedge (az)^2 = az)$$

が成り立つ．すなわち R_2 において a は冪等元の因子である．

証明　((1) $\Longrightarrow$ (2))　多項式 $a^2X^2 - aX$ で生成されるイデアル $I = (a^2X^2 - aX)$ に対し，剰余環 $R_2 = R_1[X]/I$ を考える．R_2 の元 X/I に対しては，$(aX)^2 =$

aX が成り立つので，$aX \notin I$ であることと，どんな $r \in R_1\backslash\{0\}$ も I に入っていないことを示せばよい．$aX \in I$ だとすると，

$$aX = \sum_{i=1}^{k} f_i(X)(a^2X^2 - aX) \quad (\text{ただし } f_i(X) \in R_1[X])$$

と書ける．$R_1[X]$ が可換環であることから，

$$aX = (c_0X^n + c_1X^{n-1} + \cdots c_{n-1}X + c_n)(a^2X^2 - aX) \quad (c_0 \neq 0)$$

としてよい．よって

$$c_0a^2X^{n+2} + \left(\sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1}a^2 - c_ia)X^{n+1-i}\right) - (c_n + 1)aX = 0$$

である．よって，

$$c_0a^2 = 0,\ c_{i+1}a^2 - c_ia = 0\ (i = 0, \cdots, n-1),\ c_n = -1$$

である．したがって $0 = c_0a^2 = c_1a^3 = \cdots = c_na^{n+2} = -a^{n+2}$ となって a が冪零元でないという仮定に反する．$r \in R_1\backslash\{0\}$ が I に入っていないことも同様に分かる．

((2) $\Longrightarrow$ (1)) $b \in R_2$ は $ab \neq 0$ であり $(ab)^2 = ab$ を満たしているとする．そうすると任意の正整数 n に対して $(ab)^n = a^nb^n = ab$ なので $a^nb^n \neq 0$，よって $a^n \neq 0$ である．したがって a は冪零元ではない． □

Σ_1-論理式 $\exists z(xz \neq 0 \wedge (xz)^2 = xz)$ を $\varphi(x)$ とおく．可換環の理論では

$$\text{“} \models \varphi(x)\text{”} \Longrightarrow \text{“任意の正整数 } n \text{ に対して } x^n \neq 0\text{”}$$

なので，$\varphi(x)$ の終結式 Res_φ は，$\{x^n \neq 0 : n \in \omega\}$ だと思ってよい．

命題 1.14 T を L-理論，A を T のモデルとする．次の 2 つの性質は同値である．

(1) A は Σ_1-論理式に関して閉じたモデルである．

(2) 任意の Σ_1-論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，

$$A \models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \longleftrightarrow \bigwedge \mathrm{Res}_\varphi(\bar{x}))$$

である．すなわち，

- 任意の $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{Res}_\varphi$ に対して，

$$A \models \forall\bar{x}(\varphi(\bar{x}) \longrightarrow \psi(\bar{x}))$$

- 任意の $\bar{a} \in A$ に対して,

$$\text{“すべての論理式 } \psi(\bar{x}) \in \mathrm{Res}_\varphi \text{ に対して } A \models \psi(\bar{a})\text{” ならば } A \models \varphi(\bar{a})$$

証明　((1) $\Longrightarrow$ (2))　Res_φ の定義から, $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{Res}_\varphi$ に対して $A \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \longrightarrow \psi(\bar{x}))$ は明らか. $\bar{a} \in A$ を任意にとる. $A \models \neg\varphi(\bar{a})$ と仮定する. A は Σ_1-論理式に関して閉じているので, T のモデル $B \supseteq A$ で $B \models \varphi(\bar{a})$ となるようなものは存在しない. よって, $L(\bar{a})$-理論, $T \cup \mathrm{Diag}(A) \cup \{\varphi(\bar{a})\}$ は矛盾している. したがって, コンパクト性定理から量記号のない L-論理式 $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ と $\bar{b} \in A \backslash \{\bar{a}\}$ が存在して,

$$A \models \theta(\bar{a}, \bar{b}) \text{ かつ } T \vdash \theta(\bar{a}, \bar{b}) \longrightarrow \neg\varphi(\bar{a})$$

である. $\bar{a}, \bar{b}$ は L に入っていないから,

$$T \vdash \forall \bar{x}(\exists \bar{y}\theta(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow \neg\varphi(\bar{x}))$$

が成り立つ. よって $\neg\exists\bar{y}\theta(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{Res}_\varphi$ かつ, $A \models \exists\bar{y}\theta(\bar{a}, \bar{y})$ である.

((2) $\Longrightarrow$ (1))　$A \subseteq B \models T$ とする. $\varphi(\bar{x})$ を Σ_1-論理式, $\bar{a} \in A$, $B \models \varphi(\bar{a})$ とする. $A \models \varphi(\bar{a})$ を示す. そのためには, 任意の $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{Res}_\varphi(\bar{x})$ に対して $A \models \psi(\bar{a})$ が成り立てばよい. $\mathrm{Res}_\varphi(\bar{x})$ の定義から, $B \models \psi(\bar{a})$ である. $\psi(\bar{x})$ は Π_1-論理式なので $A \models \psi(\bar{a})$ である. □

系 1.15　R を Σ_1-論理式に関して閉じた可換環とする. R の元 r に対して,「r が冪零元であること」と

$$R \models \forall z((rz)^2 = rz \longrightarrow rz = 0)$$

は同値である. つまり「r が冪零元である」ということを一階の論理式で書くことができる.

1.3　Hilbert 第 17 問題

モデル完全な理論の性質を利用して, Hilbert 第 17 問題の肯定解を解説する. 有名な Hilbert23 の問題の中の 17 番目にあげられたものである.

Hilbert 第 17 問題：　$f(x_1, \cdots, x_n)$ を有理係数 n 変数有理式とする. 任意の $(r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{Q}^n$ に対して, $f(r_1, \cdots, r_n)$ の分母が 0 でなければ, $f(r_1, \cdots, r_n) \geq$

0 が成り立っている．このとき，f は平方元の有限和になっているか．すなわち，$g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_l(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{Q}(x_1,\cdots,x_n)$ が存在して，$f(x_1,\cdots,x_n)=g_1(x_1,\cdots,x_n)^2+\cdots+g_l(x_1,\cdots,x_n)^2$ となっているか．

E.Artin がこれを 1920 年代に肯定的に解いた．Artin の論法は『可換体論』(永田雅宣著，裳華房，数学選書 6) 5 章に詳しく解説されているが，ここではモデル理論を用いた，A.Robinson による証明法を紹介する．

そのために，**実体**，**順序体**，**実閉体**といった概念を定義しなければならない．

定義 1.16 (1) 体 F に対して，-1 が F の元の平方の有限和になっていないとき，F を実体と呼ぶ．$\sum F^2$ を F の元の平方の有限和全体の集合とする．

(2) $(F,+,\cdot,<,1,0)$ が体であり，F の上の全順序 $<$ が次の性質を持つとき，順序体であるという．

(i) $\forall x\forall y\forall z\forall w(x\geq y\wedge z\geq w\longrightarrow x+y\geq z+w)$,

(ii) $\forall x\forall y(x\geq y\longrightarrow -x\leq -y)$,

(iii) $\forall x\forall y(x>0\wedge y>0\longrightarrow xy>0)$.

(3) 体 F が実体であり，さらに F の代数拡大体で実体であるものは F に限るとき F を実閉体と呼ぶ．

実閉体というのは，実数体 $\mathbb{R}$ の性質を公理化したものである．このままでは一階の述語論理式を用いて,「F は実閉体である」ということを書くことができない．しかし Artin による定式化を用いると，モデル理論で扱えるようになる．その前に簡単な性質を練習問題としておく．

問題 5 (1) 順序体は実体である．

(2) 実体の標数は 0 である (したがって順序体の標数も 0 である).

(3) 有理数体 $\mathbb{Q}$ は順序体であるが，$\mathbb{Q}$ を順序体にする方法は一通りしかない．$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ を順序体にする方法は 2 通りしかない．

(4) F が実体のとき，$F(x_1,\cdots,x_n)$ も実体である．

定理 1.17 実体には，適当に順序を入れて順序体にすることができる．

定理 1.18 (E.Artin)　順序体 F は次の 2 つの性質を持てば実閉体である.

(1) $F \models \forall x \exists y (x > 0 \longrightarrow x = y^2)$,

(2) 奇数次数の F-係数 1 変数多項式は F に少なくとも 1 つ解を持つ.

この定理により，実閉体の理論を公理化することができる．また，実閉体の性質 (1) より実閉体への順序の入れ方は一通りしかないことが分かる．言語 $L_{\mathrm{or}} = \{+, \cdot, <, 1, 0\}$ を用いて Artin の定理を L-文で表現した集合を RCF とおく．Real Closed Fields の頭文字をとって RCF である．次節で述べるが，Tarski は RCF が量記号を消去することを示した．よってモデル完全なことが分かる．このことと，Artin の次の定理を用いれば実閉体の第 17 問題は簡単に証明できる．

定理 1.19　F を実体とする．F の元 f は，F の元の有限個の平方和になっていない (これを $f \notin \sum F^2$ と書く) とする．このとき，$f <_f 0$ にするような順序 $<_f$ を F に入れることができる．

実閉体の第 17 問題の証明　F を実閉体とする．$f(x_1, \cdots, x_n)$ を F-係数の n 変数有理式とする．任意の $(a_1, \cdots, a_n) \in F^n$ に対して，$f(a_1, \cdots, a_n)$ の分母が 0 でなければ，$f(a_1, \cdots, a_n) \geq 0$ が成り立っているとする．このとき，$g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_l(x_1, \cdots, x_n)$ が存在して，$f(x_1, \cdots, x_n) = g_1(x_1, \cdots, x_n)^2 + \cdots + g_l(x_1, \cdots, x_n)^2$ であることを示す．

まず，$F(x_1, \cdots, x_n)$ が実体であることに注意する．よって，$f(x_1, \cdots, x_n) \notin \sum F(x_1, \cdots, x_n)^2$ とすると，Artin の定理により，$f(x_1, \cdots, x_n)$ を負にするような順序 $<_f$ を $F(x_1, \cdots, x_n)$ に入れることができる．順序体 $(F, +, \cdot, <_f, 0, 1)$ の実閉包を F^* とする．F^* は実閉体である．各 $x_1, \cdots, x_n$ を F^* の元とみなすと，

$$F^* \models \exists v_1 \cdots \exists v_n (f(v_1, \cdots, v_n) < 0)$$

が成り立つ．有理式 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の係数はすべて F の元であり，$F \prec F^*$ であるので，

$$F \models \exists v_1 \cdots \exists v_n (f(v_1, \cdots, v_n) < 0)$$

が成り立つ．しかし，これは $f(x_1, \cdots, x_n)$ に対する仮定に反する．　□

Hilbert の第 17 問題は，有理数体に関するものである．実閉体の第 17 問題が肯

定的に解けることを利用して，有理数体の第 17 問題を解くことを考える．

実数体の第 17 問題から，有理数体の第 17 問題へ： (1) 有理数係数の n 変数有理式 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が任意の $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{Q}^n$ に対して，$f(a_1, \cdots, a_n)$ の分母が 0 でなければ，

$$\mathbb{Q} \models f(a_1, \cdots, a_n) \geq 0$$

という条件をみたしているとする．有理数の稠密性と，通常のユークリッド位相での有理式の連続性から，任意の $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，$f(a_1, \cdots, a_n)$ の分母が 0 でなければ，

$$\mathbb{R} \models f(a_1, \cdots, a_n) \geq 0$$

という条件をみたしていると考えてよい ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ にはそれぞれ一通りの方法でしか順序が入らないことにも注意).

(2) $g_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, g_t(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{Q}(x_1, \cdots, x_n)$ が存在して，

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{t} g_i^2(x_1, \cdots, x_n)$$

である．

証明　$\mathbb{Q}(\bar{x})$ は実体なので，もし $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{t} g_i^2(\bar{x})$ という形で書けないならば，$f(\bar{x})$ を負にするような順序を $\mathbb{Q}(\bar{x})$ に定義することができる．R を $\mathbb{Q}(\bar{x})$ の実閉包とすると，

$$R \models \exists v_1 \cdots \exists v_n f(v_1, \cdots, v_n) < 0$$

が成り立っている．次節で述べるが，RCF は完全な理論であることも分かっているので，$R \equiv \mathbb{R}$ である．また，多項式 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の係数はそれぞれ有理数なので L_{or} で定義可能である．よって，

$$\mathbb{R} \models \exists v_1 \cdots \exists v_n f(v_1, \cdots, v_n) < 0$$

となって (1) で述べたことに反する．□

1.4　量記号消去

モデル完全という性質は非常に扱い易いが，どんな理論もそうである訳ではない．考えている理論の論理式の構造に大きく依存する．一般に論理式の構造は，そこに現れる $\forall$ や $\exists$ の現れ方に依存する．$\forall$ や $\exists$ が現れない場合は非常に簡単になる．すなわち量記号の現れない論理式は，

$$(\varphi_1^1(\bar{x}) \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_1}^1) \vee \cdots \vee (\varphi_1^k(\bar{x}) \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}^k)$$

の形に書くことができる．ここで各 $\varphi_j^i(\bar{x})$ は素式あるいは素式の否定である．このような，量記号の現れない論理式を Δ_0-論理式と呼ぶのであった．

定義 1.20　T を L-理論とする．任意の L-論理式 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ に対して，L の Δ_0-論理式 $\psi(v_1, \cdots, v_n)$ が存在して，

$$T \vdash \forall v_1 \cdots \forall v_n (\varphi(v_1, \cdots, v_n) \longleftrightarrow \psi(v_1, \cdots, v_n))$$

が成り立つとき，T は**量記号を消去**するという．

よって T が量記号を消去するときは，Δ_0-論理式だけを考慮すればよい．どのような理論が量記号を消去するかを調べるためには，次の補題が基本的である．

補題 1.21　L を，定数記号を少なくとも 1 つ持つ言語，T を L-理論とする．$\varphi(v_1, \cdots, v_m)$ を L-論理式とする．このとき，次の 2 つは同値である．

(1) $\varphi(v_1, \cdots, v_m)$ は量記号を消去する，すなわち Δ_0-論理式 $\psi(v_1, \cdots, v_m)$ が存在して，

$$T \vdash \forall v_1 \cdots \forall v_n (\varphi(v_1, \cdots, v_n) \longleftrightarrow \psi(v_1, \cdots, v_n)),$$

(2) $M, N \models T$ と M, N に含まれる部分構造 M_0，さらに任意の $a_1, \cdots, a_m \in M_0$ に対し，

$$M \models \varphi(a_1, \cdots, a_m) \Longleftrightarrow N \models \varphi(a_1, \cdots, a_m)$$

が成り立つ．

証明　((1) $\Longrightarrow$ (2))　Δ_0-論理式は部分構造間で保存されるというのが，ポイントである．次の同値関係から明らかである．

$$\begin{aligned}
M \models \varphi(a_1, \cdots, a_m) &\iff M \models \psi(a_1, \cdots, a_m) \\
&\iff M_0 \models \psi(a_1, \cdots, a_m) \quad (M_0 \subset M \text{ だから}) \\
&\iff N \models \psi(a_1, \cdots, a_m) \quad (M_0 \subset N \text{ だから}) \\
&\iff N \models \varphi(a_1, \cdots, a_m)
\end{aligned}$$

((2) $\Longrightarrow$ (1)) $T \vdash \forall \bar{v} \varphi(\bar{v})$ のときは，$T \vdash \forall \bar{v}(\varphi(\bar{v}) \longleftrightarrow c = c)$ である．$T \vdash \forall \bar{v} \neg \varphi(\bar{v})$ のときは，$T \vdash \forall \bar{v}(\varphi(\bar{v}) \longleftrightarrow c \neq c)$ である．

よって，$\varphi(\bar{v})$ と $\neg\varphi(\bar{v})$ がともに T と矛盾しない場合を考える．

$$\Gamma(\bar{v}) = \{\psi(\bar{v}) : \psi \text{ は } \Delta_0\text{-論理式かつ } T \vdash \forall \bar{v}(\varphi(\bar{v}) \longrightarrow \psi(\bar{v}))\}$$

とおく．$d_1, \cdots, d_m$ を L に属さない定数記号とする．$L' = L \cup \{d_1, \cdots, d_m\}$ とおく．

$T \cup \Gamma(\bar{d}) \vdash \varphi(\bar{d})$ である．もしそうでなければ，$T \cup \Gamma(\bar{d}) \cup \{\neg\varphi(\bar{d})\}$ は無矛盾なので，モデル M を持つ．定数記号 $\bar{d}$ の M における解釈をやはり $\bar{d}$ とおく．M_0 を $\bar{d}$ によって生成された ($\bar{d}$ を含む最小の) M の部分構造とする．$\Sigma = T \cup \mathrm{Diag}_0(M_0) \cup \{\varphi(\bar{d})\}$ とおく．もし Σ が矛盾していれば，量記号を含まない有限個の文 $\psi_1(\bar{d}), \cdots, \psi_n(\bar{d}) \in \mathrm{Diag}_0(M_0)$ が存在して

$$T \vdash \forall \bar{v} \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\bar{v}) \right) \longrightarrow \neg\varphi(\bar{v}) \right)$$

が成り立つ．したがって，

$$T \vdash \forall \bar{v} \left(\varphi(\bar{v}) \longrightarrow \left(\bigvee_{i=1}^{n} \neg\psi_i(\bar{v}) \right) \right)$$

である．よって定義から $\bigvee_{i=1}^{n} \neg\psi_i(\bar{v}) \in \Gamma$ である．そうすると $M_0 \models \bigvee_{i=1}^{n} \neg\psi_i(\bar{d})$ となって矛盾．よって Σ は無矛盾である．よってモデル N を持つ．$\Sigma \supseteq \mathrm{Diag}_0(M_0)$ なので，$M_0 \subseteq N$ としてよい．今 (2) $\Longrightarrow$ (1) を証明しているのだから，$M \models \neg\varphi(\bar{d})$ から $N \models \varphi(\bar{d})$ を得る．ところが $N \models \Sigma$ であることから $N \models \varphi(\bar{d})$ でもあるので矛盾する．よって $T \cup \Gamma(\bar{d}) \vdash \varphi(\bar{d})$ であることが分かった．そうすると $T \cup \Gamma(\bar{d}) \cup \{\neg\varphi(\bar{d})\}$ は矛盾する．よってコンパクト性定理から，有限個の文 $\psi_1(\bar{d}), \cdots, \psi_n(\bar{d}) \in \Gamma(\bar{d})$ が存在して

$$T \cup \{\psi_1(\bar{d}), \cdots, \psi_n(\bar{d}), \neg\varphi(\bar{d})\}$$

が矛盾する．よって，

$$T \vdash \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\bar{d}) \right) \longrightarrow \varphi(\bar{d})$$

である．定数記号 $\bar{d}$ は L には属していなかったので，述語論理の一般論から

$$T \vdash \forall \bar{v} \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\bar{v}) \right) \longrightarrow \varphi(\bar{v}) \right)$$

である．したがって，

$$T \vdash \forall \bar{v} \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\bar{v}) \right) \longleftrightarrow \varphi(\bar{v}) \right)$$

である．$\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(\bar{v})$ は Δ_0-論理式なので，与えられた論理式 $\varphi(\bar{v})$ の量記号が消去されたことになる．□

1.4.1　$\mathbf{ACF}_p$ は量記号を消去する．

さて，理論 T が与えられたとき，どうすれば T が量記号を消去するかどうか判定できるだろうか．論理式の構造に関して少し考えると次のことが分かる．すなわち，T が量記号を消去するかどうかは，Δ_0-論理式 $\varphi(w, v_1, \cdots, v_n)$ に対し，論理式 $\exists w \varphi(w, v_1, \cdots, v_n)$ の量記号が取れるかどうかを調べればよいことが分かる．したがって，例えば ACF_p が量記号を消去するかどうかを調べたい場合は，ACF_p の Σ_1-論理式の量記号が消去できるかどうかを，今証明した補題 1.21 を使って調べればよい．

定理 1.22　ACF_p は量記号を消去する．

証明　K, L を ACF_p のモデル，F を K と L に共通な部分体とする．$\varphi(x, \bar{y})$ を Δ_0-論理式，$\bar{a} \in F$ とする．

$$K \models \exists x \varphi(x, \bar{a}) \Longleftrightarrow L \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$$

を示せばよい．議論の対称性から，

$$K \models \exists x \varphi(x, \bar{a}) \Longrightarrow L \models \exists x \varphi(x, \bar{a})$$

だけを示す．$\varphi(x, \bar{a})$ は Δ_0-論理式なので，和積標準形を考えれば，

$$\bigvee_{i=1}^{l}\left(\bigwedge_{j=0}^{m_i} f_{i,j}(x)=0 \wedge \bigwedge_{k=0}^{n_i} g_{i,k}(x)\neq 0\right)$$

ただし，各 $f_{i,j}(x)$, $g_{i,k}$ は F-係数多項式で，係数の全体が論理式 $\varphi(x,\bar{a})$ のパラメーター $\bar{a}$ である．仮定から，

$$K \models \bigwedge_{j=0}^{m_i} f_{i,j}(b)=0 \wedge \bigwedge_{k=0}^{n_i} g_{i,k}(b)\neq 0$$

を満たす自然数 i と $b\in K$ が存在する．

$j\neq 0$ の場合．F の代数的閉包を $\overline{F}$ とする．F 上代数的な元はすべて K と L に属しているので $\overline{F}$ は K と L の部分体である．$j\neq 0$ なので $b\in\overline{F}$ である．よって $b\in L$ なので $L\models\exists x\varphi(x,\bar{a})$ である．

$j=0$ の場合，

$$K \models \bigwedge_{k=1}^{n_i} g_{i,k}(b)\neq 0$$

である．$g_{i,1}(x)=0,\cdots,g_{i,n_i}(x)=0$ の解は全部合わせても高々有限個であり，代数的閉体 L は無限集合なので，

$$L \models \bigwedge_{k=1}^{n_i} g_{i,k}(c)\neq 0$$

を満たす $c\in L$ が存在する．よってこの場合も $L\models\exists x\varphi(x,\bar{a})$ が得られた． □

ある理論 T が量記号を消去するとしよう．A, B を T のモデルとし，$A\subseteq B$ とする．論理式に量記号が現れないと仮定してよいので，そのような論理式の自由変数のところに A の元をパラメーターとして代入したものを考えたとき，A で正しいということと B で正しいと言うことは同値になる．すなわち，T はモデル完全である．したがって次の定理が証明された．

定理 1.23 理論 T が量記号を消去するならば，T はモデル完全である．

系 1.24 代数的閉体の理論 ACF_p はモデル完全である．

1.4.2 量記号を消去する体は，代数的閉体である．

体の理論が持つモデル理論的性質に応じて，体の代数的性質を導き出すことができる．次の性質はその 1 つである．体論の基本事項をいくつか復習しておこう．

定義 1.25 体 K は，どんな代数拡大体も分離的であるとき**完全体**であるという．

完全体に関する次の補題は基本的である．証明は，例えば『可換体論』(永田雅宜著) 2 章 2.3 を参照していただきたい．

補題 1.26　(1) 標数 0 の体は，完全体である．

(2) 有限体は，完全体である．

(3) 正標数 p の体 K が完全体であるための必要十分条件は，任意の $a \in K$ に対して，a の p 乗根が K 内に存在することである．

定理 1.27　F を無限体とする．$\mathrm{Th}(F)$ が量記号を消去するとき F は代数的閉体である．

証明　初等同値な体で考えることにして，F の超越次数は無限であるとする．以後 F の元で，素体上代数的に独立なものを単に代数的に独立という．

第 1 段階： まず F が完全体であることを示す．標数が 0 の体は完全体だから，$\mathrm{ch}(F) = p > 0$ の場合を考える．F の任意の元 a に対して，方程式 $X^p - a = 0$ が F の中に解を持つことを示せばよい．まず，$\mathrm{Th}(F)$ が量記号を消去するので，「v は p-乗根を持つ」ということを表現する論理式 $\exists u(u^p = v)$ は，量記号がない論理式 $\varphi(v)$ と同値であることに注意する．F の素体を $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ とする．$\theta \in F$ を $\mathbb{F}_p$ 上超越的かつ a と代数的に独立な元とすると，多項式環 $\mathbb{F}_p[X_1, X_2]$ の元 $f(X_1, X_2)$ で $f(\theta, a) = 0$ を満たすものは，零多項式しかない．同様のことが，θ^p と a に対してもあてはまるので θ^p と a も $\mathbb{F}_p$ 上代数的に独立である．

さて明らかに，θ は方程式 $X^p - \theta^p = 0$ の解である．すなわち a と独立な θ^p は p 乗根を持つ．よって

$$\mathrm{Th}(F) \vdash (\exists u(u^p = \theta^p)) \longleftrightarrow \varphi(\theta^p)$$

が成り立つ．$\varphi(v)$ は量記号を持たないから $\mathbb{F}_p$ 上 a と代数的に独立な任意の超越元 $\eta \in F$ に対して

$$F \models \varphi(\eta)$$

が成り立つ．したがって a と独立な $a\theta^p$ も p 乗根 $b\theta$ を持つ．$b^p = a$ が成り立っているから $b \in F$ は a の p 乗根である．a は F の任意な元だったから F は完全体であることが分かった．

第 2 段階： 次に，F-係数多項式のうち，係数たちが $\mathbb{F}_p$ 上代数的に独立な場合は F 内に解を持つことを示す．すなわち，$a_1, \cdots, a_n$ を F の元で代数的に独立なものとすると，方程式

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

は F の中に解を持つことを示す．

$b_1, \cdots, b_n$ を F の元で代数的に独立なものとする．多項式 $p(X) = \prod_{i<n}(X - b_i)$ を考える．$p(X) = X^n + s_1 X^{n-1} + \cdots + s_n$ と書くと，$s_1, \cdots, s_n$ は $b_1, \cdots, b_n$ の基本対称式なので代数的に独立である．$\mathrm{Th}(F)$ が量記号を消去するので,「n 次方程式は解を持つ」ということが量記号なしの論理式で表現できる．すなわち，

$$\mathrm{Th}(F) \vdash \exists u(u^n + s_1 u^{n-1} + \cdots + s_n = 0) \longleftrightarrow \varphi(s_1, \cdots, s_n)$$

が成り立つような，量記号なしの n 変数論理式 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ が存在する．よって，$\mathrm{Th}(F)$ の中で次が成り立っている．

$$\begin{aligned} \exists u(u^n + s_1 u^{n-1} + \cdots + s_n = 0) &\iff \varphi(s_1, \cdots, s_n) \\ &\iff \varphi(a_1, \cdots, a_n) \\ &\iff \exists u(u^n + a_1 u^{n-1} + \cdots + a_n = 0) \end{aligned}$$

したがって，方程式 $X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ は F の中に解を持つ．よって係数が代数的に独立な方程式は解けることが分かった．

第 3 段階： 一般の方程式も解けることを示せば，F が代数的閉体であることが分かる．背理法によって示す．いま F は代数的に閉じていないとする．よって F-係数のある方程式 $p(X)$ は F に解を持たない．

$$p(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad (a_i \in F)$$

とする．F は完全体なので，F のどんな代数拡大体も分離的である．よって $p(X) \in F[X]$ の解 $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ はすべて異なりかつ F の外にある．また $L = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は F のガロア拡大である．F の超越次数が無限なので，$\{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ から代数的に独立な F の元を $t_0, \cdots, t_{n-1}$ とする (各 t_i は $\mathbb{F}_p$ 上超越的)．各 $i = 1, \cdots, n$ に対して，

$$r_i = t_0 + t_1\alpha_i + t_2\alpha_i^2 + \cdots + t_{n-1}\alpha_i^{n-1}$$

とおく．さらに多項式

$$q(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - r_i)$$

の係数を $c_0, \cdots, c_{n-1}$ とおく．符号を無視すれば，$c_0, \cdots, c_{n-1}$ は $r_1, \cdots, r_n$ の基本対称式であり，$\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$ は $a_0, \cdots, a_{n-1}$ 上代数的なので，各 $i = 0, \cdots, n-1$ に対して，

$$c_i \in \mathrm{acl}(a_0, \cdots, a_{n-1}, t_0, \cdots, t_{n-1})$$

である．また符号を無視すれば，$a_0, \cdots, a_{n-1} \in F$ は $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \notin F$ の基本対称式である．各 t_i は F の元で，各 c_i は $t_0, \cdots, t_{n-1}$ を係数とする $a_0, \cdots, a_{n-1}$ の多項式として表される．よって各 c_i は F の元である．さらに次の関係が成り立っている．

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^{n-1} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

各 α_i は異なるので，左の行列は正則である．よって，

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^{n-1} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_0 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{pmatrix}$$

である．よって，$t_0, \cdots, t_{n-1} \in F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, r_1, \cdots, r_n)$ である．各 r_i は $q(X) = 0$ の解なので $\{c_0, \cdots, c_{n-1}\}$ 上代数的である．よって各 $i = 0, \cdots, n-1$ に対して

$$t_i \in \mathrm{acl}(a_0, \cdots, a_{n-1}, c_0, \cdots, c_{n-1})$$

である．取り方から $t_0, \cdots, t_{n-1}$ は，$\{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ から独立である代数的に独立な超越元だったので，$c_0, \cdots, c_{n-1}$ も，$\{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ から独立である代数的に独立な超越元である．

よって (2) より方程式 $q(X)=0$ の解はすべて F に属する．すなわち $r_1,\cdots,r_n \in F$ である．そうすると，r_i の定義式から α_i は $(n-1)$ 次方程式の解になっている．これは α_i の最小多項式の次数が n であることに反する． □

注意 1.28 Th(F) が量記号を消去すれば，Th(F) はモデル完全である．よって Th(F) の任意のモデルは Σ_1-論理式に関して閉じているから代数的閉体である．このように証明すればより早く証明することができるが，上述の論法は，3 章で「ω-安定な体は代数的閉体である」という Macintyre の定理を証明する際にも再登場する．

上の証明の中で用いた性質を演習問題にしておく．

問題 6 (1) θ, η を超越的な元とする．a と θ は代数的独立，a と η も代数的独立とする．$\varphi(v)$ を量記号を含まない 1 変数論理式とする．このとき

$$\mathrm{Th}(F) \vdash \varphi(\theta) \longleftrightarrow \varphi(\eta)$$

である．

(2) $a_1,\cdots,a_n$ を代数的に独立な n 個の元とする．$s_1,\cdots,s_n$ を $a_1,\cdots,a_n$ の基本対称式とする．このとき，$s_1,\cdots,s_n$ も代数的に独立である．

1.4.3 正量記号消去と射影的多様体の完備性

量記号の消去では，与えられた論理式から量記号を消去するときに否定記号が入ってくるかもしれない．しかし否定記号を含まずに量記号を消去できる場合がある．どのような場合に可能かを考える．

補題 1.29 M, N を L-構造とし，$f: M \longrightarrow N$ を L-準同型とする．f は M から N の上への写像であるとする．また $\varphi(\bar{v})$ を否定記号を含まない論理式とする．このとき $\bar{a} \in M$ に対して，

$$M \models \varphi(\bar{a}) \Longrightarrow N \models \varphi(f\bar{a})$$

である．

証明 演習問題とする． □

命題 1.30 (正量記号消去) T を L-理論とする．$\varphi(\bar{x})$ を，L-論理式とする．このとき，次の 2 つは同値である．

(1) 否定記号と量記号を含まない論理式 $\psi(\bar{x})$ が存在して，

$$T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \longleftrightarrow \psi(\bar{x}))$$

(2) $M, N \models T$, $A \subseteq M$ とする．$f : A \longrightarrow N$ を L-準同型とする．$\bar{a} \in M$ に対して，$M \models \varphi(\bar{a})$ ならば $N \models \varphi(\bar{a})$ である．

証明　((1) $\Longrightarrow$ (2))　これは，上の補題そのものである．

((2) $\Longrightarrow$ (1))

$$\Gamma(\bar{v}) = \{\psi(\bar{v}) : \psi \text{ は否定記号と量記号を含まず } T \models \forall \bar{v}(\psi(\bar{v}) \longrightarrow \varphi(\bar{v}))\}$$

とおく．有限個の新しい定数記号 $\bar{c}$ を導入して，

$$\Sigma = T \cup \{\neg\psi(\bar{c}) : \psi \in \Gamma\} \cup \{\varphi(\bar{c})\}$$

を考える．Σ は矛盾する．もし無矛盾ならば，モデル M を持つ．

$$\Sigma' = T \cup \{\neg\varphi(\bar{c})\} \cup \{\theta(\bar{c}) : M \models \theta(\bar{c}),\ \theta(\bar{v}) \text{ は否定記号と量記号を含まない }\}$$

とおく．Σ が無矛盾だから Σ' も無矛盾であり，$N \models \Sigma'$ とする．$A \subset M$ を $\bar{c}$ で生成される M の部分構造とする．そうすると，$M \models \varphi(\bar{c})$ かつ $N \models \neg\varphi(\bar{c})$ なので矛盾してしまう．よって Σ は矛盾する．あとはコンパクト性定理から (1) を満たす，否定記号と量記号を含まない論理式 $\psi(\bar{v})$ が得られる．　□

この結果を使うと「射影多様体の完備性」が証明できる．

(概要) $V \subseteq \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ を代数的集合とする．V の $\mathbb{P}^n$ への射影が代数的集合であることを示す．V は有限個の斉次多項式 $f_1(\bar{x}, \bar{y}), \cdots, f_k(\bar{x}, \bar{y})$ の零点集合として定義されている．V の $\mathbb{P}^n$ への射影は

$$\exists \bar{y} \left(\bigwedge_{i=1}^{k} f_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \ \wedge \bigvee_{j=1}^{m} y_j \neq 0 \right)$$

(m は $\bar{y}$ の長さ) で定義されるが，上述の正量記号消去より，量記号と否定記号を含まない論理式で定義される．すなわち $\mathbb{P}^n$ において有限個の斉次多項式の零点集合として定義されるので，代数的集合になっている．

1.4.4 実閉体の理論は，量記号を消去する．

さて最後に実閉体の理論が量記号を消去することを証明しよう．

定義 1.31　L を言語，T を L-理論とする．T に属する L-文の中で，Π_1-文と (T のもとで) 同値なもの全体の集合を $T_\forall$ と書く．任意の $A \models T_\forall$ に対して，A を含む T のモデル M が存在して，A を含む T のどんなモデル N に対しても A の各点を固定するような M の N への埋め込み $h: M \longrightarrow N$ が存在するとき，T は**代数的素モデルを持つ**という．

命題 1.32　L を言語，T を L-理論とする．

(1) T は代数的素モデルを持つ．

(2) 任意の $M, N \models T$ に対し，$M \subseteq N$ ならば $M \preceq_1 N$ である．このとき T は量記号を消去する．

証明　演習問題とする．□

補題 1.33　$\mathrm{RCF}_\forall$ は順序整域の理論である．

証明　まず，実閉体の部分構造は順序整域であることに注意する．

逆に，$(D, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ を順序整域，F を D の商体とする．D の順序を F に自然に拡張することができる．$(R, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ を F の実閉包とすると，

$$(D, <) \subset (F, <) \subset (R, <)$$

である．よって $\mathrm{RCF}_\forall$ は順序整域の理論である．□

定理 1.34　RCF は，言語 $L_{\mathrm{or}} = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$ で量記号を消去する．

証明　**第 1 段階：** まず RCF が代数的素モデルを持つことを示す．$\mathrm{RCF}_\forall$ は順序整域の理論であることに注意する．$(D, <)$ を任意な順序整域とする．D の商体 E へ自然に順序が拡張できる．このようにして定義された順序体 $(E, <)$ の実閉包を $(R, <)$ とおく．$(F, <)$ を $(D, <)$ を含む任意の実閉体とする．

$$K = \{\alpha \in F : \alpha \text{ は } E \text{ 上代数的 }\}$$

とおく．K は実閉体である．K の順序は $(D, <)$ を拡張しているので D の各点を固定する同型 $\phi: F \longrightarrow K$ が存在する．さて RCF が代数的素モデルを持つことを示

すためには，$h : R \longrightarrow F$ の存在を示さなければならないが，F と K は D 上同型なので $h : R \longrightarrow K$ の存在を示せばよい．

第 2 段階： $F, K \models \mathrm{RCF}$ かつ $F \subseteq K$ ならば $F \preceq_1 K$ であることを示す．$\phi(\bar{x}, y)$ を量記号のない論理式とする．$\bar{a} \in F$ とし $K \models \phi(\bar{a}, b)$ であるような $b \in K$ が存在するとき，$F \models \phi(\bar{a}, b')$ であるような $b' \in F$ が存在することを示せばよい．多項式 $p(\overline{X}) \in F[\overline{X}]$ に対して，

- $p(\overline{X}) > 0 \vee -p(\overline{X}) > 0)$,
- $\mathrm{RCF} \vdash p(\overline{X}) \not> 0 \longleftrightarrow (p(\overline{X}) = 0 \vee -p(\overline{X}) > 0)$

であることに注意する．よって論理式 $\phi(\bar{a}, y)$ は

$$\bigvee_i \left(\bigwedge_j \psi_{i,j}(\bar{a}_{i,j}, y) \right)$$

の形をしていると仮定してよい．ここで各 $\psi_{i,j}(\bar{a}_{i,j}, y)$ は "多項式 $= 0$" または "多項式 > 0" の形である．また各 i, j について $\bar{a}_{i,j} \in F$ で $\bar{a}_{i,j}$ 全体の和集合が $\bar{a}$ である．

よって 1 変数多項式 $p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_n \in F[X]$ が存在して

$$\phi(\bar{a}, y) \longleftrightarrow \left(\bigwedge_{i=1}^{m} p_i(y) = 0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} q_i(y) > 0 \right)$$

に対して，$F \models \phi(\bar{a}, b')$ であるような $b' \in F$ が存在することを示せばよい．

もしどれかの多項式 $p_i(X)$ が零多項式でなければ，$b \in K$ は F 上代数的な元である．F は実閉体なので $b \in F$ でなければならない．よって，

$$\phi(\bar{a}, y) \longleftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} q_i(y) > 0$$

の場合を考える．各多項式 $q_i(X)$ の零点はすべて F の元である．またこれら零点の前後で符号が変わる．よって $c_i < d_i$ であるような c_1, $d_i \in F$ が存在して，

$$K \models c_i < b < d_i \text{ かつ，任意の } x \in (c_i, d_i) \subset F \text{ に対して } F \models q_i(x) > 0$$

である．$c = \max\{c_1, \cdots, c_m\}$ かつ $d = \min\{d_1, \cdots, c_n\}$ とおいて $c < b' < d$ であるような F の元を b' とすると，

$$F \models \phi(\bar{a}, b)$$

である．□

系 1.35 RCF は，モデル完全かつ完全である．

証明 量記号消去から，モデル完全であることは明らか．$R \models \mathrm{RCF}$ とする．実閉体の標数は 0 なので，有理数体 $\mathbb{Q}$ を常に含む．よって $\mathbb{Q} \subset R$ である．$\mathbb{Q}$ の実閉包を $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}}$ と書くと，$\mathbb{R}_{\mathrm{alg}} \models \mathrm{RCF}$ かつ $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}} \subseteq R$ である．モデル完全性から $\mathbb{R}_{\mathrm{alg}} \equiv R$ である．よって RCF は完全である． □

1.5 代数的閉体のタイプ

タイプというのは論理式の無矛盾な集合である．考えている理論が量記号を消去する場合はその構造はより鮮明になってくる．ここでは代数的閉体の部分体上の完全タイプは素イデアルに他ならないことを示す．

K を代数的閉体とし，$k \subset K$ を部分体とする．k は代数的に閉じているとは限らない．$S_n^K(k)$ は K における k 上の n-変数完全タイプ全体の集合である．$p \in S_n^K(k)$ に対して，

$$I_p = \{f(\overline{X}) \in k[X_1, \cdots, X_n] : f(\bar{v}) = 0 \in p\}$$

とおく．容易に分かるように，I_p は多項式環 $k[\overline{X}]$ の素イデアルである．

逆向きを示すために補題が必要である．

補題 1.36 $P \subset k[\overline{X}]$ を素イデアルとする．このとき $Q \cap k[\overline{X}] = P$ となる素イデアル $Q \subset K[\overline{X}]$ が存在する．

証明 多項式環 $K[\overline{X}]$ において P で生成されるイデアル $K[\overline{X}]P$ を考える．このとき

$$K[\overline{X}]P \cap k[\overline{X}] = P$$

である．$K[\overline{X}]P \cap k[\overline{X}] \subseteq P$ を示めす (逆向きは明らか)．K を k-線形空間と考えたときの基底を B とする．ただし $1 \in B$ とする．この B は $K[\overline{X}]$ を 自由 $k[\overline{X}]$-加群と考えたときの基底にもなっている．よって $f \in K[\overline{X}]$ ならば，

$$f = \sum_{b \in B} b f_b$$

ただし，各 f_b は $k[\overline{X}]$ の元で，有限個を除いて $f_b = 0$ である．$f \in K[\overline{X}]$ ならば，

各 $f_b \in P$ である．また $f \in K[\overline{X}]P \cap k[\overline{X}]$ ならば，$f = f_1 \in P$ である．$k[\overline{X}]\backslash P$ は掛け算に関して閉じている．$S = k[\overline{X}]\backslash P$ とおく．$Q \subset K[\overline{X}]$ を，P を含んで S と交わらないようなイデアルのなかで極大なものの 1 つとする．このとき Q は素イデアルで，$Q \cap k[\overline{X}] = P$ である．□

この補題を用いて，素イデアル $P \subset k[\overline{X}]$ に対応する完全タイプを定義する．$Q \subset K[\overline{X}]$ を $Q \cap k[\overline{X}] = P$ を満たすイデアルとする．商体 $K[\overline{X}]/Q$ の代数的閉包を F とすると，$K \prec F$ である．$x_i = X_i/Q (i = 1, \cdots, n)$ とおくと，各 $f \in K[\overline{X}]$ に対して，

$$f(\overline{x}) = 0 \Longleftrightarrow f \in Q$$

である．よって $p = \mathrm{tp}_F(\overline{x}/k)$ とおくと，$I_p = P$ である．したがって完全タイプ p にイデアル I_p を対応させる $S_n^K(k)$ から $k[\overline{X}]$ への写像は，上への写像になっている．次に ACF_p が量記号を消去することを用いて，この写像が 1 対 1 であることを示す．論理式には量記号が現れないから，

$$\bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{k} f_{i,,j}(\bar{x}) = 0 \wedge \bigwedge_{l=1}^{s} g_{i,l}(\bar{x}) \neq 0 \right)$$

の形に書くことができる．ただし，各 $f_{i,j}$, $g_{i,l}$ は k-係数多項式である．よって $p, q \in S_n^K(k)$ に対して，$I_p = I_q$ ならば，

$$f_{i,j}(\bar{x}) = 0 \in p \Longleftrightarrow f_{i,j}(\bar{x}) = 0 \in q$$

かつ，

$$g_{i,j}(\bar{x}) = 0 \in p \Longleftrightarrow g_{i,j}(\bar{x}) = 0 \in q$$

である．よって $p = q$ でなければならない．したがって写像 $p \longmapsto I_p$ は 1 対 1 である．

注意 1.37　$\mathrm{Spec}(k[\overline{X}])$ を多項式環 $k[\overline{X}]$ の素イデアル全体からなる集合にザリスキー位相を入れた空間とする．

(1) 上で定義した写像 $p \longmapsto I_p$ は $S_K^n(k)$ から $\mathrm{Spec}(k[\overline{X}])$ への連続な，1 対 1 かつ上への写像である．

(2) $p \longmapsto I_p$ は同相写像ではない．

(3) $\mathrm{Spec}(k[\overline{X}])$ は，ザリスキー位相に関してコンパクトである．これは，完全タイプ全体の集合である Stone 空間 $S^n_K(k)$ のコンパクト性と，写像 $p \longmapsto I_p$ の連続性から導かれる．

1.6 コンパクト性定理

コンパクト性定理は非常に重要な定理であり，これまでも多用してきた．ここでもう一度内容を再確認し，代数への応用を 3 つ解説する．まず，いくつかある「変形版」を確認しておこう．

定理 1.38 (コンパクト性定理) (1) Σ を言語 L の文の集合とする．このとき，「Σ が無矛盾である (モデルを持つ)」ということと,「Σ の任意の有限部分集合が無矛盾である」ということは同値である．

(2) M を L-構造とする．言語 $L(M)$ の論理式 $\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)$ の集合を $\Sigma(x_1,\cdots,x_n)$ とする．Σ から任意に有限個の論理式 $\varphi_{i_1},\cdots,\varphi_{i_k}$ をとったとき，

$$M \models \exists x_1 \cdots \exists x_n(\varphi_{i_1}(x_1,\cdots,x_n) \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}(x_1,\cdots,x_n))$$

が成り立っているとする．このとき M のある初等拡大 N とある $(a_1,\cdots,a_n) \in N^n$ が存在して，Σ に属するすべての $\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)$ に対して $N \models \varphi(a_1,\cdots,a_n)$ が成り立つ．

(3) σ を一階の述語論理式で書かれた文とする．このとき「σ が標数 0 の代数閉体で成り立つ」,「σ が十分大きな正標数の代数閉体でなりたつ」，さらに「σ が有限個を除いてすべての正標数の代数閉体でなりたつ」の 3 つは互いに同値である．これを**第一階 Lefschetz 原理**と呼ぶ．

さてコンパクト性定理を応用して，代数的閉包の存在，Ax の定理を証明する．その後で，Hilbert の既約性定理が成り立つような体 (Hilbert 体) の特徴付けに関する簡単な定理を証明する．

1.6.1 代数的閉包の存在

定理 1.39 (代数的閉包の存在) 任意の体 F にたいして，F の代数的閉包が存在する．

証明　体 F に対して，F を含む代数的閉体 K が存在することを証明する．それらの共通部分を考えれば，F の代数的閉包が得られる．

(1) 任意有限個の一変数既約多項式 $f_1(X), \cdots, f_n(X) \in F[X]$ に対して $f_1, \cdots, f_n$ の解を含む拡大体 F_0 が存在することを示そう．$\mathfrak{M}$ を $f_1(X), \cdots, f_n(X)$ を含む極大イデアルとする．$F[X]/\mathfrak{M} = F_0$ とする．$x = X/\mathfrak{M} \in F_0$ とすると，$f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0$ である．

(2) $F[X]$ のすべての一変数既約多項式の解を含む拡大体 F_1 が存在する．まず $F[X]$ の一変数既約多項式をすべて並べる．それらを $f_1(X), \cdots, f_i(X), \cdots$ としよう．新しい定数記号 c_i を各一変数既約多項式 $f_i(X)$ ごとに導入する．

$$\Sigma = \{f_i(c_i) = 0 : i \in \omega\}$$

を考える．(1) より Σ の任意の有限部分集合をみたすモデル，すなわち F の拡大体が存在する．よってコンパクト性定理より $\mathrm{Th}(F) \cup \Sigma$ は無矛盾である．したがって $F[x]$ のすべての既約多項式の解を含む F の拡大体が存在する．

(3) (2) より $F \subset F_1 \subset \cdots F_i \subset \cdots$ となる体の拡大列が存在する．ここで $F_i[X]$ の各既約多項式の解が F_{i+1} に存在する．$K = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ とおく．$K[X]$ の既約多項式の解は K に存在することを示す．$K[X]$ の既約多項式を $g(X)$ とする．$g(X)$ の係数の個数は有限個なので，これらをすべて含む体 F_i が存在する．よって $g(X)$ の解は F_{i+1}，すなわち K の中にある．□

1.6.2　Ax の定理

定理 1.40 (Ax)　f を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ への多項式写像とする．このとき f が単射であれば，f は全射である．

証明　$f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ が多項式写像なので，n 個の n 変数多項式 $f_1(X_1, \cdots, X_n), \cdots, f_n(X_1, \cdots, X_n) \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ が存在して

$$f(X_1, \cdots, X_n) = (f_1(X_1, \cdots, X_n), \cdots, f_n(X_1, \cdots, X_n))$$

と書ける．

各 $i = 1, \cdots, n$ に対して，

$$f_i(X_1, \cdots, X_n) = \sum c_{i,j} X_1^{e_{i,1}} \cdots X_n^{e_{i,n}}$$

とする．ここで $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ である．各不定元 X_i を変数 v_i に替え，係数 $c_{i,j}$ を他の変数 $u_{i,j}$ に替えて，環の言語 L_r で書かれた次のような論理式 $\varphi(v_1, \cdots, v_n)$ を考える．

$$\forall u_{1,j} \cdots \forall u_{n,j} \,(\text{“}f(v_1, \cdots, v_n)\text{ が単射”} \longrightarrow \text{“}f(v_1, \cdots, v_n)\text{ が全射”})$$

このとき，任意の体 F に対して，

$$F \models \forall v_1 \ \cdots \ \forall v_n \varphi(v_1, \cdots, v_n)$$

ということは，$f = (f_1, \cdots, f_n)$ と同じ単項式が現れ，係数が異なる任意の多項式写像 $g : F^n \longrightarrow F^n$ に対して，g が単射なら g は全射であるということを主張している．

ここで，

$$\mathrm{ACF}_p \models \forall v_1 \ \cdots \ \forall v_n \varphi(v_1, \cdots, v_n)$$

を示せば，ACF_p は完全な理論なので

$$\mathbb{C} \models \forall v_1 \ \cdots \ \forall v_n \varphi(v_1, \cdots, v_n)$$

となり，与えられた f が単射なら f は全射であることが分かる．

$\mathrm{ACF}_p \models \forall v_1 \ \cdots \ \forall v_n \varphi(v_1, \cdots, v_n)$ を示すのに Lefschetz の原理 (すなわちコンパクト性定理) を用いる．p を素数，K を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の代数的閉包とする．K に対し，任意の多項式写像 $g : K^n \longrightarrow K^n$ が単射なら，全射になっていることを示す．g を 1 つ固定する．g の係数は全部合わせても有限個なので，それらすべてを含む K の有限部分体 K_0 が存在する．g が全射であることを示すために，$\overline{a} \in K^n$ をとる．すると，$\overline{a} \cup K_0 \subseteq K_1$ となる K の有限部分体 K_1 が存在する．$g : K_1^n \longrightarrow K_1^n$ になっていてしかも単射である．K^n は有限なので K_1^n に制限したとき g は全射になっている．よって $\overline{b} \in K_1^n$ が存在して $g(\overline{b}) = \overline{a}$ となっている．よって g は K^n 全体で考えても全射になっている． □

1.6.3 Hilbert 体の特徴付け

まず Hilbert 既約性定理と呼ばれる定理を紹介する．

定理 1.41 (Hilbert 既約性定理)　$f \in \mathbb{Q}[T_1, \cdots, T_r, X]$ が既約ならば，有理数 $a_1, \cdots, a_r$ が存在して $f(a_1, \cdots, a_r, X) \in \mathbb{Q}[X]$ も既約である．

このような性質を持つ体として，**Hilbert 体**を次のように定義する．

定義 1.42　K を体とする．任意の既約多項式 $f_1(T, X), \cdots, f_m(T, X) \in K[T, X]$ と任意の多項式 $0 \neq g(T) \in K[T]$ に対して，

$$\bigwedge_{i=1}^{m} (f(a, X) \text{ は } K[X] \text{ で既約 }) \wedge g(a) \neq 0$$

を満たす $a \in K$ が存在するとき，K を **Hilbert 体**と呼ぶ．

コンパクト性定理を用いると，Hilbert 体の簡単な特徴付けが可能である．

定理 1.43 (Gilmore-Robinson)　K を体とする．このとき，体 K が Hilbert 体であるための必要十分条件は，K の初等拡大 K^* と元 $t \in K^* \backslash K$ が存在して，$K(t)$ が K^* で代数的に閉じていることである．

証明　K を Hilbert 体とする．K の言語を L とし，$L(K)$ に新しい定数記号 t, X を付け加えた言語を $L_{t,X}$ とおく．

主張： $f(T, X) \in K[T, X]$ を既約多項式とする．このとき,「$f(t, X)$ は既約である.」は $L_{t,X}$-文として書くことができる．

$f(T, X) = g_0(T)X^n + g_1(T)X^{n-1} + \cdots + g_n(T)$ とする.「$f(t, X)$ は既約である」ということは,

$$\bigvee_{i=1}^{l} (\forall \bar{x} (\alpha_i(X) \cdot \beta_i(X) = f(t, X) \longrightarrow (\alpha_i(X) = 1 \vee \beta_i(X) = 1)))$$

ということである．ここで各 i について，$\deg(\alpha_i(X)) + \deg(\beta_i(X)) = n$ であるようにとり，$\alpha(X), \beta(X) \in K[X]$ の係数を x_j で置き換え，先頭に $\forall \bar{x}$ を付けたものが上の式である．$L_{t,X}$-理論 Σ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}\Sigma = \mathrm{Th}(K) & \\ & \cup \{\text{“}f(t, X) \text{ は既約”} : f(T, X) \in K[T, X] \text{ は既約 }\} \\ & \cup \{g(t) \neq 0 : g(T) \in K[T] \backslash \{0\}\} \\ & \cup \{h(X) \neq 0 : h(X) \in K[X] \backslash \{0\}\}\end{aligned}$$

$$\cup\{\alpha(t,X)\neq 0:\alpha(T,X)\in K[T,X]\backslash\{0\}\}$$

K が Hilbert 的であるので，コンパクト性定理より Σ は無矛盾である．Σ のモデルを K^* とすると，$K \prec K^*$ である．K^* における t の解釈を再び t と書くことにすれば，任意の既約な $f(T,X)\in K[T,X]$ と任意の $0\neq g(X)\in K[T]$ に対して $f(t,X)$ は $K^*[X]$ で既約であり，$g(t)\neq 0$ である．各 $k\in K$ に対して $t-k\neq 0$ だから，$t\notin K$ である．$K(t)$ 上代数的な $x\in K^*$ を考える．$f(T,X)\in K[T,X]$ を $f(t,x)=0$ であるような既約多項式とする．$f(t,X)$ は K^* で既約なので $f(t,X)$ は 1 次の多項式でなければならない．よって $x\in K(t)$ である．したがって $K(t)$ は K^* の中で代数的に閉じている．

逆に，K の初等拡大 K^* と，$E=K(t)$ が K^* の中で代数的に閉じているような $t\in K^*\backslash K$ が存在したとする．$f_1,\cdots,f_m\in K[T,X]$ を既約多項式とし，$0\neq g\in K[T]$ を任意の多項式とする．もしどれかの $f_i(t,X)$ が K^* 上可約ならば，$f_i(t,X)$ の因数の係数は，すべて $\tilde{E}\cap K^*=E$ に属する．ただし，$\tilde{E}$ は E の代数的閉包である．よって $f_i(t,X)$ は E 上可約である．したがって，t が K 上超越的であることに注意すれば，$f_i(T,X)$ が K 上可約になってしまって，f_i の取り方に反する．よってすべての $f_i(t,X)$ は既約である．また $g(t)\neq 0$ である．よって K^* では

$$K^*\models \exists v\left(\bigwedge_{i=1}^{m}(\text{“}f_i(v,X)\ \text{は既約”})\wedge g(v)\neq 0\right)$$

が成り立つ．$K\prec K^*$ なので，K の元 a で，

$$\bigwedge_{i=1}^{m}(\text{“}f_i(a,X)\ \text{は既約”})\wedge g(a)\neq 0$$

を満たすものが存在する．よって K は Hilbert 体である． □

注意 1.44 M.D.Fried と M.Jarden は “*Field Arithmetic*” の中で，超準解析的手法を用いて Hilbert 体について詳しく調べている．上述の定理はその中の 1 つであるが，超準解析的手法を用いなくてもコンパクト性だけで証明できる．しかし，例えば $\mathbb{Q}$ が Hilbert 体であることを証明しようとすると，付値体のモデル理論を展開する必要がある．

1.7　M^{eq} という考え方と仮想元消去

数学では，同値関係や商構造はごく自然に登場する．群に対して商群を定義したり，整域から商体を構成したりするのはその典型的な場合である．ところがモデル理論では，扱う論理式が第一階古典論理式なので，同値類を点とみなす商構造が扱えない．構造と，その構造の商構造たちとを同時に 1 つの枠組みで扱おうとしてもできないのである．この困難を解消するために，S.Shelah は M^{eq} という構造を考えた．

モデル M とその言語 L を考える．自然数 n に対して，パラメーターを含まない $2n$-変数 L-論理式で定義される M^n 上の同値関係を E とする．M^n/E の各同値類をそれぞれ点とみなし，**仮想元**と呼ぶ．

パラメーターを用いずに定義される (0-定義可能という)，M 上のあらゆる同値関係の同値類に対するそれぞれの仮想元をすべて合わせた構造を M^{eq} と呼ぶ．すなわち，

$$M^{\mathrm{eq}} = \{e : \text{0-定義可能な同値関係 } E \text{ が存在して } e \text{ は } E\text{-同値類}\}$$

である．この新しい世界でモデル理論を展開することにすれば，上で述べた困難が解消される．

論理式 $x = y$ を考えると，M の各元 a を $a/(x = y)$ と考えることによって，$M \subset M^{\mathrm{eq}}$ であることが分かる．また論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \bigwedge_{i<n} x_i = y_i$ を考えると，$(a_1, \cdots, a_n) \in M^n$ を $\bar{a}/\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in M^{\mathrm{eq}}$ と同一視するのは自然である．

定義 1.45　$X \subseteq M^n$ を定義可能な集合とし，X を定義する論理式を $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ とする．ここで $\bar{x}$ の長さは n で $\bar{a} \in M$ の長さは m とする．L-論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ に対して，$2m$-変数同値関係 E_φ を，

$$E_\varphi(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \Longleftrightarrow \forall \bar{x}\,(\varphi(\bar{x}, \bar{y}_1) \longleftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{y}_2))$$

によって定義する．$\bar{a}/E_\varphi \in M^{\mathrm{eq}}$ を X の**標準仮想パラメーター** (あるいは標準基底) と呼ぶ．

$X \subseteq M^n$ を定義可能集合とし，$e \in M^{\mathrm{eq}}$ を X の標準仮想パラメーターとする．この e に対して，$\bar{b} \in M^m$ が存在して，

$$e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\bar{b}) \text{ かつ } \bar{b} \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(e)$$

という関係が成り立っているとする．このとき，

$$\forall\sigma \in \mathrm{Aut}(M)\left(\sigma(X) = X\ (\text{集合を固定}) \iff \sigma(\bar{b}) = \bar{b}\ (\text{各点を固定})\right)$$

である．この $\bar{b}$ は，X を定義する最も本質的なパラメーターと考えることができる．$\bar{b}$ を X の標準実パラメーターと呼ぶことにする．

例 1.46 関係として等号だけを持つ無限集合 M を考える．$a, b \in M$ に対して，$\{a, b\} \subset M$ は論理式 $\varphi(x, a, b) :=$ "$x = a \vee x = b$" で定義される．この φ に対しては，標準実パラメーターは存在しない．

例 1.47 $L = \{E\}$，ただし E は 2 変数述語記号とする．M を L-構造とし，E は M 上の同値関係で，同値類の個数は無限個で，各同値類は無限集合になっている．この場合各同値類に対して，標準実パラメーターは存在しない．

例 1.48 複素数体に指数関数を付け加えた構造 $\mathbb{C}_{\mathrm{exp}} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 1, 0, \mathrm{exp})$ は，仮想元を消去しないことが次のようにして分かる．まず exp を用いると，有理数が $\mathbb{C}_{\mathrm{exp}}$ の中で定義可能である．実際，論理式

$$\varphi(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exists\alpha\exists\beta(\exp(\alpha) = \exp(\beta) = 1 \wedge \alpha \neq 0 \wedge x = \beta/\alpha)$$

は有理数を定義している．この $\varphi(x)$ を用いて，$x, y \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\exists z(\varphi(z) \wedge z = x - y)$$

のとき，$x \sim y$ と定義する．この同値関係の同値類に対しては，標準実パラメーターが存在しない．よって $\mathbb{C}_{\mathrm{exp}}$ は仮想元を消去しない．実は，後に述べる意味での，弱い仮想元消去もできない．

このように標準実パラメーターは常に存在するとは限らないが，どんな定義可能集合に対しても標準実パラメーターが存在する場合には M^{eq} は不要になる．この場合，M^{eq} で定義可能な集合 (M で翻訳可能という) は，M で定義可能になる．

定義 1.49 T を L-理論とする．$M \models T$ を任意のモデルとする．

(1) 任意の仮想元 $e \in M^{\mathrm{eq}}$ に対して，$\bar{b} \in M^m$ が存在して

$$e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\bar{b}) \text{ かつ } \bar{b} \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(e)$$

が成り立つとき，T は**仮想元を消去する**という．

同じことであるが，M^n の同値関係 $\theta(\bar{x},\bar{y})$ と $\bar{a}\in M^n$ に対して，L-論理式 $\varphi(\bar{x},\bar{z})$ が存在して，

$$\bar{a}/\theta=\varphi(M^n,\bar{b})=\{\bar{c}\in M^n : M\models\varphi(\bar{c},\bar{b})\}$$

となる $\bar{b}\in M^m$ が唯一存在するとき，T は仮想元を消去するという．つまり各同値類が定義可能であるということを主張している．ここで論理式 φ は，θ と $\bar{a}$ ごとに決まればよい．

(2) (1) において，同値類を定義する論理式 φ が，同値関係を定義する論理式 θ だけで決まる場合を考える．このような場合，T は仮想元を**一様に**消去するという．すなわち，0-定義可能な M^n 上の同値関係 E に対して，自然数 m と 0-定義可能な関数 $f: M^n\longrightarrow M^m$ が存在して，

$$\bar{x}E\bar{y}\Longleftrightarrow f(\bar{x})=f(\bar{y})$$

が成り立つとき，T は仮想元を一様に消去するという．

1.7.1 代数的閉体の理論は仮想元を一様に消去する

ここでは，代数的閉体の理論が仮想元を一様に消去することを証明する．

補題 1.50 k を体とする．代数的に閉じている必要はない．$\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$, $\bar{y}=(\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)$ (各 $\bar{x}_i$, $\bar{y}_j\in k^m$) に対して，$(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$ が $(\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_n)$ の置換になっているとき $\bar{x}E\bar{y}$ と書く．E は定義可能な同値関係である．

この E に対して，ある自然数 l と定義可能な関数 $f: k^{mn}\longrightarrow k^l$ が存在して，任意の $\bar{c}$, $\bar{d}\in k^{mn}$ に対して

$$\bar{c}E\bar{d}\Longleftrightarrow f(\bar{c})=f(\bar{d})$$

が成り立つ．

証明 $\bar{c}=(\bar{c}_1,\cdots,\bar{c}_n)\in k^{mn}$ とし，各 $i=1,\cdots,n$ について，$\bar{c}_i=(c_{i,1},\cdots,c_{i,m})$ とする．多項式環 $k[X_1,\cdots,X_m,Y]$ に属する多項式，

$$Y-\sum_{j=1}^{m}c_{i,j}X_j$$

を $q_i^{\bar{c}_i}$ とおき，$p_{\bar{c}} = \prod_{i=1}^{n} q_i^{\bar{c}_i}$ とおく．$p_{\bar{c}}$ の係数を並べたものを $f(\bar{c})$ とする．$k[X_1, \cdots, X_m, Y]$ は一意分解整域なので，

$$p^{\bar{c}} = p^{\bar{d}} \Longleftrightarrow \text{“}(q_1^{\bar{c}_1}, \cdots, q_n^{\bar{c}_n}) \text{ は } (q_1^{\bar{d}_1}, \cdots, q_n^{\bar{d}_n}) \text{ の置換である”}$$

よって $\bar{c}E\bar{d}$ と $f(\bar{c}) = f(\bar{d})$ は同値である． □

定義 1.51 M を L-構造，E を M^n 上の定義可能な同値関係とする．$\bar{a} \in M^n$ に対し，$\bar{a}/E$ を $\bar{a}$ の E-同値類とする．M の元 $b_1, \cdots, b_m$ と c に対し，次の性質を持つ論理式 $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_m)$ が存在するとき，c は $b_1, \cdots, b_m$, $\bar{a}/E$ 上代数的であるという．

(1) $M \models \varphi(c, \bar{a}, \bar{b})$,

(2) $\bar{a}E\bar{a}'$ ならば，$M \models \forall x(\varphi(x, \bar{a}, \bar{b}) \longleftrightarrow \varphi(x, \bar{a}', \bar{b}))$

(3) $\{x \in M : M \models \varphi(x, \bar{a}, \bar{b})\}$ は有限集合である．

各 c_i が $b_1, \cdots, b_m$, $\bar{a}/E$ 上代数的であるとき $\bar{c} = (c_1, \cdots, c_l)$ は，$b_1, \cdots, b_m$, $\bar{a}/E$ 上代数的であるという．

問題 7 $\bar{c}$ が，$\bar{a}/E$, $\bar{d}$, $\bar{b}$ 上代数的で，$\bar{b}$ が $\bar{a}/E$, $\bar{d}$ 上代数的ならば，$\bar{c}$ は $\bar{a}/E$, $\bar{d}$ 上代数的である．

補題 1.52 K を代数的閉体とし，$\bar{d} \in K$ とする．$\bar{d}$ をパラメーターとする K^n 上の同値関係 $E(\bar{x}, \bar{y})$ が，$L(\bar{d})$-論理式 $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ で定義されているとする．各 $\bar{a} \in M^n$ に対し，$\bar{a}/E$, $\bar{d}$ 上代数的で $\bar{a}E\bar{c}$ であるような $\bar{c} \in M^n$ が存在する．

証明 集合

$$X_1 = \{v \in K : K \models \exists x_2 \cdots \exists x_n \psi(v, x_2, \cdots, x_n, \bar{a})\}$$

を考える．

• X_1 が有限集合である場合，$c_1 \in X_1$ を任意の元とすると c_1 は $\bar{a}/E$, $\bar{d}$ 上代数的である．

• X_1 が無限集合である場合は，代数的閉体 K の強極小性から $K \backslash X_1$ が有限集合である．この場合は，素体の代数閉包が無限集合であるので素体上代数的な $c_1 \in X_1$ が存在する．この場合も c_1 は $\bar{a}/E$, $\bar{d}$ 上代数的である．

いずれにしても $\bar{a}/E, \bar{d}$ 上代数的な $c_1 \in K$ が存在する．次に集合

$$X_2 = \{v \in K : K \models \exists x_3 \cdots \exists x_n \psi(c_1, v, x_3, \cdots, x_n, \bar{a})\}$$

に対して同様の議論を繰り返して $c_2 \in K$ を得る．以下同じようにして $c_3, \cdots, c_n$ を探すことによって $\bar{a}/E, \bar{d}$ 上代数的な $\bar{c} = (c_1, \cdots, c_n)$ を見つけることができる．□

注意 1.53　この議論は，5 章でザリスキー幾何が仮想元を弱い意味で消去することを保障する補題 5.38 の証明と同じである．

定理 1.54　K を代数的閉体とし $A \subset K$ を部分集合とする．E を A 上定義可能な K^n 上の同値関係とする．このとき，自然数 l と A 上定義可能な関数 $f : K^n \longrightarrow K^l$ が存在して，

$$\bar{x}E\bar{y} \Longleftrightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{y})$$

が成り立つ．

証明　記述を簡単にするため $A = \varnothing$ とする．前の補題により任意の $\bar{a}/E$ に対して，$\bar{a}/E$ 上代数的な $\bar{c}$ が存在する．定義より論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ と正整数 k が存在して，

$$\begin{aligned} \Theta_{\varphi,k}(\bar{y}) := \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \longrightarrow \bar{x}E\bar{y}) \wedge \\ \forall \bar{x}\forall \bar{z}(\bar{y}E\bar{z} \longrightarrow (\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \longleftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{z}))) \wedge \\ |\{\bar{x} : \varphi(\bar{x}, \bar{y})\}| = k \end{aligned}$$

とおけば，K で $\Theta_{\varphi,k}(\bar{a})$ が成り立っている．また $\bar{b} \in K^n$ が $\bar{a}E\bar{b}$ であれば，$\Theta_{\varphi,k}(\bar{b})$ が成り立つ．

ここで $X = \{\bar{a} \in K^n : K \models \Theta_{\varphi,k}(\bar{a})\}$ とし，各 $\bar{a} \in X$ に対して，$Y_{\bar{a}} = \{\bar{b} \in K^n : K \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})\}$ とおく．明らかに，$\bar{a}, \bar{b} \in K^n$ に対して，

$$\bar{a}E\bar{b} \Longleftrightarrow Y_{\bar{a}} = Y_{\bar{b}}$$

である．よって正整数 l と定義可能な関数 $f : X \longrightarrow K^l$ が存在して，

$$\bar{a}E\bar{b} \Longleftrightarrow Y_{\bar{a}} = Y_{\bar{b}} \Longleftrightarrow f(\bar{a}) = f(\bar{b})$$

である．

このようにして，各 $\bar{a} \in K^n$ ごとに，論理式 φ と正整数 k が存在して $\Theta_{\varphi,k}(\bar{a})$ が成り立っている．したがってコンパクト性定理から，有限個の論理式 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ と正整数 $k_1, \cdots, k_m$ が存在して，任意の $\bar{a} \in K^n$ は，$\Theta_{\varphi_1,k_1}(\bar{y}), \cdots, \Theta_{\varphi_m,k_m}(\bar{y})$ の中のどれかを満たしているようにできる．

各 i に対して，$X_i = \{\bar{a} \in K^n : K \models \Theta_{\varphi_i,k_i}(\bar{a})\}$ とおくと，上と同じように，正整数 l_i と定義可能な関数 $f_i : X_i \longrightarrow K^{l_i}$ が存在して，$\bar{a}, \bar{b} \in K^n$ に対して，

$$\bar{a}E\bar{b} \Longleftrightarrow f_i(\bar{a}) = f_i(\bar{b})$$

が成り立つ．$\bar{x} \in K^n \backslash X_i$ に対しては $f_i(\bar{x}) = 0$ とすることによって各 f_i を K^n 全体から K^{l_i} への関数としておく．最後に，定義可能関数 $f : K^n \longrightarrow K^{l_1+\cdots+l_m}$ を

$$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \cdots, f_m(\bar{x}))$$

によって定義する．そうすると，

$$\bar{a}E\bar{b} \Longleftrightarrow f(\bar{a}) = f(\bar{b})$$

なので，この f が求めるものである． □

系 1.55 代数的閉体の理論は，仮想元を消去する．

注意 1.56 代数的閉体が仮想元を消去することは，A.Weil の導入した定義体という概念を用いて B.Poizat が初めて証明した．仮想元の弱い消去という考え方を導入して証明する方法もある．

任意の仮想元 $x \in M^{\mathrm{eq}}$ に対して，$\bar{y} \in M^n$ が存在して

$$x \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\bar{y}) \text{ かつ } \bar{y} \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(x)$$

が成り立つとき，M は**仮想元を弱い意味で消去する**という．代数的閉体に限らず，3 章で紹介する強極小集合と呼ばれる構造では，補題 1.52 で用いた論法により，$\mathrm{acl}(\varnothing)$ が無限集合であれば仮想元の弱い消去が常に成り立つ．それと補題 1.50 を組合わせれば，代数的閉体の仮想元消去が導かれる．

2

整数論との交流

この章では，初等整数論と数理論理学が交差する話題を 3 つ解説する．

2.1 Lagrange の 4 平方数定理

1 つ目は数理論理学の定理というよりは，純粋に初等整数論の定理である．

定理 2.1 (Lagrange) 任意の自然数は，4 つの整数の平方の和として表される．

任意の自然数ではなく，任意の素数が 4 つの整数の平方の和になっていることを示せばよいことが次の等式から直ちにわかる．

補題 2.2 (Euler の等式)

$$
\begin{aligned}
&(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\
&= (x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 + (x_0y_1 - x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)^2 \\
&\quad + (x_0y_2 - x_2y_0 + x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_0y_3 - x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)^2
\end{aligned}
$$

任意の素数が 4 つの整数の平方の和として表されることを示すには，次の補題が必要である．

補題 2.3 (Euler の補題) 任意の奇素数 p に対して，整数 x, y が存在して，$x^2 + y^2 \equiv -1 \pmod p$ かつ $0 \leq x, y \leq (p-1)/2$ が成り立つ．

証明 証明は部屋割り論法を用いる．$0 \leq x \leq (p-1)/2$ である 各 x に対して x^2 を考える．全部で $(p+1)/2$ 個あるが，これらの中のどの 2 つも法 p に関して互に合同ではない．同様に，$0 \leq y \leq (p-1)/2$ なる各 y に対して $-1-y^2$ を考える．x

の場合同様，全部で $(p+1)/2$ 個あるが，これらの中のどの 2 つも法 p に関して互に合同ではない．よって x と y を合わせると全部で $p+1$ 個ある．したがって，ある x と y に対して，$x^2 \equiv -1-y^2 \pmod p$ でなければならない．　□

この補題を用いて，Lagrange の定理を示そう．Euler の等式と，自然数が素因数分解されることから，奇素数に対して 4 平方数定理を示せばよい．証明は「降下法」と呼ばれる方法を用いる．Fermat が考え出した証明方法であるが，自然数の無限降下列が存在しないという性質を用いる．

p を奇素数とする．p が 4 つの平方数の和で書けることを示す．Euler の補題より，$0 \leq x, y \leq (p-1)/2$ をみたす整数に対して，$x^2+y^2+1^2+0^2=mp$ となる整数 m，ただし $1 \leq m < p$ が存在する．$m=1$ であれば，p はすでに 4 つの平方数の和で書けている．よって m は 1 より大きいとしよう．降下法の出発点として，

$$x^2+y^2+z^2+w^2=mp \quad (1<m<p)$$

が成り立っているとする．このとき，自然数 x, y, z, w を用いて定義される自然数 X, Y, Z, W に対して，$X^2+Y^2+Z^2+W^2=m'p$ が $1 \leq m' < m$ をみたす m' に対して成り立つことを示す．自然数の無限降下列が存在しないので，いつかは $m=1$，すなわち p 自身が 4 つの平方数の和で書けなければならないことが分かる．m の偶・奇に分けて証明する．

m が偶数の場合．mp は偶数なので，x, y, z, w のうち，すべてが偶数，すべてが奇数，あるいは x, y の 2 つが偶数で，z, w の 2 つが奇数であるという 3 つの場合が考えられる．これら 3 つのうちのいずれの場合にせよ，

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(\frac{z+w}{2}\right)^2+\left(\frac{z-w}{2}\right)^2=\frac{m}{2}\cdot p$$

が成り立つ．よって mp より小さい $(m/2)p$ が 4 つの平方数の和で書けた．

m が奇数の場合．$x_0 \equiv x$, $y_0 \equiv y$, $z_0 \equiv z$, $w_0 \equiv w \pmod m$ かつ，$|x_0|$, $|y_0|$, $|z_0|$, $|w_0| < m/2$ を満たすような整数 x_0, y_0, z_0, w_0 が存在する．x, y, z, w すべてが m の倍数だとすると $x^2+y^2+z^2+w^2$ は m^2 の倍数になってしまって p が素数だという仮定に反する．したがって x_0, y_0, z_0, w_0 の少なくとも 1 つは 0 でない．よって $x^2+y^2+z^2+w^2 \equiv x_0^2+y_0^2+z_0^2+w_0^2 \pmod m$ かつ $0 < x_0^2+y_0^2+z_0^2+w_0^2 < m^2$ なので $1 \leq m' < m$ である整数 m' が存在して，$x_0^2+y_0^2+z_0^2+w_0^2=m'm$

が成り立つ．よって，Euler の等式から，$(x^2+y^2+z^2+w^2)(x_0^2+y_0^2+z_0^2+w_0^2) = m^2m'p = a^2+b^2+c^2+d^2$ が成り立つ．a, b, c, d はすべて m で割り切れるので，$X=a/m, Y=b/m, Z=c/m, W=d/m$ とおくと，$X^2+Y^2+Z^2+W^2 = m'p \ (1 \leq m' < m)$ が成り立つ．

系 2.4　自然数は整数の中で定義可能である．

$\mathbb{N}$ が $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ の中で定義可能なことは明白であろう．すなわち，論理式 $\varphi(x) = \exists a \exists b \exists c \exists d\,(x = a^2+b^2+c^2+d^2)$ を考えればよい．$\mathbb{N}$ が定義可能になると順序 $\leq$ も可能になる．すなわち，$y-x$ が自然数になれば，$x \leq y$ となるからである．

問題 1　$(\mathbb{Z},+,\cdot)$ の中で $\leq$ を定義する論理式を見つけよ．つまり，$m, n \in \mathbb{Z}$ に対して，$\mathbb{Z} \models \eta(m,n)$ と $m \leq n$ が同値になるような論理式 $\eta(x,y)$ を見つけよ．

2.2　$\mathbb{Z}$ は $(\mathbb{Q},+,\cdot,0,1)$ の中で定義可能である

整数が有理数の中で定義されてしまうという Julia Robinson の定理を紹介する．

一階の論理式 $\phi(x)$ で，$\{n \in \mathbb{Q} : \mathbb{Q} \models \phi(n)\} = \mathbb{Z}$ となるようなものを，Julia Robinson が 1948 年に学位論文の中で与えた．

これからさき，有理数は n/d ($n \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N} - \{0\}$, n, d は互いに素) という形をしているとする．このとき，有理数が整数になっているためには，分母が 1 であることが必要十分である．したがって問題はどのようにして「分母が 1 である」ことを一階の論理式で表現するかである．ここで特に注意しなければならないのは,「分母」とか「分子」とかが定義可能ということを問題にしている訳ではないということである．そうではなくて,「分母が 1」ということを定義しようとしていることを念頭において読み進んでほしい．

さて，ではどうやって「分母が 1」ということを認識するのだろうか．考え方はそれほど突飛ではなく,「どんな素数も分母を割り切らない」ことを確認すれば「分母が 1」であることが分かるということを利用する.「どんな素数も $\cdots$」の部分で実際にすべての素数を調べていたのでは論理式で表すことができない．この部分は mod 4 で考えることにする．$p \equiv 1, 3 \pmod 4$ であることに注意すれば 2 つの場合を調べればよい．結論を先に書いてしまおう．

$$\alpha(q,p,n) := \exists a \exists b \exists c (2 + qpn^2 = a^2 + qb^2 - pc^2)$$

をまず考える．この $\alpha(p,q,n)$ を用いると，$\mathbb{Z}$ は次のように定義できる．

$$\phi(x) := \forall q \forall p\,((\alpha(q,p,0) \wedge \forall t(\alpha(q,p,t) \longrightarrow \alpha(q,p,t+1)) \longrightarrow \alpha(q,p,x))$$

問題 2　数学的帰納法により，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{Q} \models \phi(n)$ となっていることを確認せよ．また，$\alpha(q,p,n)$ と $\alpha(q,p,-n)$ が同値であることを用いて任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$\mathbb{Q} \models \phi(n)$ であることを示せ．

$\mathbb{Z}$ の定義の核心部分である $\alpha(q,p,n)$ はどこから来るのであろうか．補題が 2 つ必要である．

補題 2.5 (主補題 1)　x を有理数，p を 4 で割ったら 3 余る素数とする．このとき，$\mathbb{Q} \models \alpha(1,p,x)$ と x の分母が p で割り切れない奇数であることは同値である．

補題 2.6 (主補題 2)　x を有理数，p, q を奇素数とし，$p \equiv 1 \pmod 4$ かつ $(q/p) = -1$ とする．このとき，$\mathbb{Q} \models \alpha(q,p,x)$ と x の分母が p, q と互いに素であることが同値である．

まず Legendre の記号の復習をしておこう．

定義 2.7 (Legendre の記号)　p を素数とする．p で割り切れない正整数 a に対して，$X^2 \equiv a \pmod p$ が存在するとき a は p の平方剰余といい，$\left(\dfrac{a}{p}\right) = 1$ と書く．a が p の平方剰余でないとき，平方非剰余といい，$\left(\dfrac{a}{p}\right) = -1$ と書く．

後の証明に必要になる事項として，有名な平方剰余の相互法則を述べておく．p, q を奇素数とする．このとき，

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right), \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

証明は例えば『初等整数論講義』(高木貞二著，岩波書店) を見ていただきたい．

さて主補題 1, 2 を用いて $\mathbb{Q} \models \alpha(x)$ から x が整数であることを示そう．p を 4 で割れば 3 余る素数とする．まず $\alpha(1,p,0)$ が成り立つ．また，任意の有理数 $m = n/d$ に対して，$\alpha(1,p,m)$ が成り立てば 主補題 1 より m の分母 d は p で割り切れない．$m+1 = (n+d)/d$ かつ $\mathrm{GCD}((n+d),d) = 1$ なので再び主補題 1 より

$\alpha(1,p,m+1)$ も成り立つ．$\mathbb{Q} \models \phi(x)$ を仮定しているので $\mathbb{Q} \models \alpha(1,p,x)$ が成り立つ．よって主補題 1 より，x の分母は p で割り切れない奇数である．したがって，x の分母は 2 でも割り切れない．残るは，x の分母が，$p \equiv 1 \pmod 4$ である素数 p で割り切れないことを示すことである．まず Legendre の記号に関しては次の性質が成り立っている．

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$$

さて p の平方非剰余 s を考える．s か $p+s$ のどちらかは奇数である．したがってその素因数を考えれば，Legendre の記号の性質から少なくとも 1 つの素因数 q は p の平方非剰余である奇素数である．さて，0 の分母は 1 なので主補題 2 より $\mathbb{Q} \models \alpha(q,p,0)$ であり，また任意の有理数 m について $\alpha(q,p,m)$ が成り立てば，m と $m+1$ の分母が等しいのでやはり主補題 2 より $\alpha(q,p,m+1)$ が成り立つ．よって x の分母は p で割り切れない．したがって x の分母はどのような素数でも割り切れないので 1 でなければならず，x が整数であることが分かる．

$\alpha(q,p,x)$ はどのようにして得られたのだろうか．主補題 1, 2 の内容をみるとなんとなく 2 次形式との関連が想像される．実は 2 次形式に関する Hasse-Minkowski の定理が背後に控えている．

定義 2.8　有理 2 次形式 $f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ $(a_i \in \mathbb{Q})$ を考える．$f(x_1,\cdots,x_n) = 0$ が $(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{Q}^n - \{(0,\cdots,0)\}$ であるような解を持つとき，f は $\mathbb{Q}$ で 0 を表すという．また，整 2 次形式，すなわち係数がすべて整数である 2 次形式 f について，$f(x_1,\cdots,x_n) \equiv 0 \pmod n$ かつ $\mathrm{GCD}(x_1,\cdots,x_n) = 1$ であるような $(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{Z}^n$ が存在するとき，f は n を法として 0 を表すという．

定理 2.9 (Hasse-Minkowski (1))　整 2 次形式 f が $\mathbb{Q}$ の中で 0 を表すための必要十分条件は，f が $\mathbb{R}$ で 0 を表し，さらにすべての正整数 n について f が n を法として 0 を表すことである．

字句通り解釈すれば，f が 0 を表すかどうかを知るにはすべての正整数について調べなければならない．しかし自然数の素因数分解と中国剰余定理から，素数の冪だけを調べればよいことが次のようにして分かる．$f(\boldsymbol{x}_j) \equiv 0 \pmod{n_j}$, $\boldsymbol{x}_j \in \mathbb{Z}$ $(1 \leq$

$j \leq s$) かつ $\mathrm{GCD}(n_i, n_j) = 1$ $(i \neq j)$ とする．中国剰余定理からすべての j について $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}_j \pmod{n_j}$ かつ $f(\mathbf{x}) \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \prod n_j\right)$ が成り立つ $\boldsymbol{x}$ が存在する．自然数の素因数分解を考えると次の形が得られる．

定理 2.10 (Hasse-Minkowski (2)) 整 2 次形式 f が $\mathbb{Q}$ の中で 0 を表すための必要十分条件は，すべての素数 p と正整数 n について f が $\mathrm{mod}\ p^n$ で 0 を表し，さらに $\mathbb{R}$ で 0 を表すことである．

この定理の証明は，整数論の本，例えば "*A Course in Arithmetic*" (J.P.Serre 著，Springer GTM 7) をみてもらうことにして，ここではこの定理を仮定して，Robinson の定理を証明する．初等整数論の議論が続くが，我慢して読みすすんでほしい．Hasse-Minkowski の定理以外には Fermat の小定理が必要になる．

定理 2.11 (Fermat の小定理) p を素数，m を p で割り切れない整数とする．このとき $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ が成立つ．

証明 $0 < m < p$ と仮定して一般性を失わない．このような m に対して写像 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \ni x \longmapsto m \cdot x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ が全単射であることより，$\{1, \cdots, p-1\} = \{m \cdot 1, \cdots, m \cdot (p-1)\}$ である．よって $1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv (m \cdot 1) \cdot (m \cdot 2) \cdots (m \cdot (p-1)) \equiv m^{p-1}(1 \cdot 2 \cdots (p-1)) \pmod{p}$．ところで，$1 \cdot 2 \cdots (p-1) \not\equiv 0 \pmod{p}$ なのだから両辺を $1 \cdot 2 \cdots (p-1)$ で割れば，$m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ を得る． □

補題 2.12 (1) 奇素数 p と p で割り切れない整数 a に対して，$X^2 \equiv a \pmod{p^n}$ が各 n について解を持つことと，a が p の平方剰余であることは同値である．

(2) 奇数 a に対して，$X^2 \equiv a \pmod{2^n}$ が各 $n \geq 3$ について解を持つことと，$X^2 \equiv a \pmod{8}$ が解を持つことは同値であり，したがって $a \equiv 1 \pmod{8}$ と同値でもある．

証明 (1) a は p の平方剰余であると仮定する．$n \geq 1$ とし $X^2 \equiv a \pmod{p^n}$ が解を持つと仮定して，$X^2 \equiv a \pmod{p^{n+1}}$ が解を持つことを示す．整数 x が $x^2 \equiv a \pmod{p^n}$ を満たしているとする．よって $x^2 = a + bp^n$ と書ける．$p \nmid 2x$ なので $2xz \equiv -b \pmod{p}$ を満たすような z が存在する．このような z に対し，$y = x + zp^n$ とおく．

$$y^2 = (x + zp^n)^2 \equiv a + (2xz + b)p^n \pmod{p^{n+1}}$$

より，$X^2 \equiv a \pmod{p^{n+1}}$ を満たす解が見つかった．

(2) $X^2 \equiv a \pmod{8}$ が解を持つと仮定する．$n \geq 3$ とし，$X^2 \equiv a \pmod{2^n}$ が解を持つと仮定して，$X^2 \equiv a \pmod{2^{n+1}}$ が解を持つことを示す．$x^2 \equiv a \pmod{2^n}$ とする．したがって $x^2 = a + b2^n$ と書ける．b が偶数の場合，$x^2 \equiv a \pmod{2^{n+1}}$ であるので証明が終わる．b が奇数の場合，$y = x + 2^{n-1}$ を考える．$y^2 = a + (b + x)2^n + 2^{2n-2}$ である．$n \geq 3$ なので $2n - 2 \geq n + 1$ である．また，x は奇数なので $b + x$ は偶数，よって $y^2 \equiv a \pmod{2^{n+1}}$ である．

奇数 a に対し，$X^2 \equiv a \pmod{8}$ と $a \equiv 1 \pmod{8}$ が同値になることを示すのは簡単な演習問題とする．□

補題 2.13 (mod l^n 上の 2 次形式)　l を素数，a, b, c, d を l で割り切れない整数とする．

(1) $aX^2 + bY^2$ が各 mod l^n で 0 を表すということと，$(-ab/l) = 1$ が同値である．

(2) $aX^2 + bY^2 + cZ^2$ は各 mod l^n で 0 を表す．

(3) $aX^2 + bY^2 + lcZ^2 + ldW^2$ が各 mod l^n で 0 を表すということと，$(-ab/l) = 1$ または $(-cd/l) = 1$ が同値である．

証明　補題 2.12 (1) より，$x^2 \equiv t \pmod{l^n}$ が解を持つことと，$(t/l) = 1$ が同値である．よって，s, t が l で割り切れない整数であって，$sx^2 \equiv t \pmod{l}$ が解を持てば，各 n について，$sx^2 \equiv t \pmod{l^n}$ が解を持つ．この点に留意して証明を進める．

(1) $aX^2 + bY^2$ が mod l で 0 を表すとする．すなわち，$ax^2 + by^2 \equiv 0 \pmod{l}$ を満たす少なくとも 1 つは l で割り切れないような x, y が存在したとする．$(-ab/l) = 1$ であることを示す．$y \not\equiv 0 \pmod{l}$ としよう．a も l で割り切れないので，

$$ax^2 + by^2 \equiv \frac{y^2}{a}\left(\left(\frac{ax}{y}\right)^2 + ab\right) \equiv 0 \pmod{l}$$

よって $\left(\dfrac{ax}{y}\right)^2 + ab \equiv 0 \pmod{l}$．これは $(-ab/l) = 1$ に他ならない．$x \not\equiv 0 \pmod{l}$ の場合も同様である．

逆に $(-ab/l)=1$ を仮定して，aX^2+bY^2 が各 mod l^n で 0 を表すということを示す．$X^2+ab\equiv 0 \pmod{l}$ の解を x とする．よって，$a\left(\dfrac{x}{a}\right)^2\equiv -b \pmod{l}$ より X の合同式 $aX^2\equiv -b \pmod{l^n}$ は各 n について解を持つ．よって $Y=1$ とすれば 2 次形式 aX^2+bY^2 は各 mod l^n で 0 を表す．

(2) $f(X,Y,Z)=aX^2+bY^2+cZ^2$ とおく．集合 $\{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^3 : f(\boldsymbol{x})\equiv 0 \pmod{l}\}$ の要素の個数を N とおく．$f(\mathbf{0})\equiv 0 \pmod{l}$ なので，f が 0 を表すことを示すには $N>1$ を示さなければならない．

Fermat の小定理から，任意の整数 m に対して，m が l の倍数でなければ $m^{l-1}\equiv 1 \pmod{l}$ であり，m が l の倍数ならば $m^{l-1}\equiv 0 \pmod{l}$ である．各 $\boldsymbol{x}\in(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^3$ に対して，$f(\boldsymbol{x})$ は l の倍数か倍数でないかどちらかなので，$N\equiv \Sigma\{1-f(\boldsymbol{x})^{l-1} : \boldsymbol{x}\in(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^3\} \pmod{l}$ である．次に $\Sigma\{1-f(\boldsymbol{x})^{l-1} : \boldsymbol{x}\in(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^3\}\equiv 0 \pmod{l}$ を示す．$g(X,Y,Z):=1-f(X,Y,Z)^{l-1}$ とおく．$(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^3$ は l^3 個の要素 $\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_{l^3-1}$ を持つ．$g(\boldsymbol{x}_0)+\cdots+g(\boldsymbol{x}_{l^3-1})$ の中身を考えると，次のことが成り立っている．

(i) 1 は l^3 回現れる．

(ii) $g(X,Y,Z)$ の中の単項式 $a^{l-1}X^{2(l-1)}$ に $\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_{l^3-1}$ を代入すると同じものがそれぞれ l^2 回現れるので，それらの和は l を法として 0 である．同じことが $b^{l-1}Y^{2(l-1)}$, $c^{l-1}Z^{2(l-1)}$ に対しても成り立つ．

(iii) $a^{l-2}bX^{2(l-2)}Y^2$ のように X, Y, Z のうち 2 つの変数しか含まない単項式に $\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_{l^3-1}$ を代入すると (ii) 同様同じものがそれぞれ l 回現れるので，それらの和も l を法として 0 である．

(iv) X, Y, Z の 3 つの変数がすべて現れる単項式を考える．X, Y, Z の指数の少なくとも 1 つは $l-1$ 未満である．例えば X の指数 s が $1\le s<l-1$ を満たしているとする．このような単項式に $\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_{l^3-1}$ を代入した場合，Y, Z に代入する値を固定して，X に $0,\cdots,l-1$ を代入したものの和をとると

$$\sum_{w=0}^{l-1} w^s \equiv \sum_{k=0}^{l-2} y^{sk} = (1-y^{s(l-1)})/(1-y^s) \pmod{l}$$

が成り立っている．ただし y は mod l に関する原始元であり，$y^{s(l-1)}\equiv 1, y^s\not\equiv 1 \pmod{l}$ である．よってこの場合も和は l を法として 0 である．従って，$N\equiv$

$0 \pmod{l}$ である．$f(0,0,0)=0$ なので $N>0$．したがって $N \geq l > 0$ である．よって $f(x,y,z) \equiv 0 \pmod{l}$ となる $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ が存在する．しかも x, y, z のうち少なくとも 1 つは l で割り切れない．例えば，x が l で割り切れないとすると，$aX^2 \equiv -by^2 - cz^2 \pmod{l}$ が解を持つことから $aX^2 \equiv -by^2 - cz^2$ は各 $\bmod\ l^n$ で解を持つ．すなわち各 $\bmod\ l^n$ で f は 0 を表す．

(3) $(-ab/l)=1$ または $(-cd/l)=1$ ならば，(1) より $Z=W=0$ または $X=Y=0$ を考えることにより，各 $\bmod\ l^n$ に対して f は 0 を表す．

逆に $f(x,y,z,w) \equiv 0 \pmod{l^2}$ と仮定する．ただし，x, y, z, w のうち少なくとも 1 つは l で割り切れない．もし $(-ab/l)=-1$ だとすると $ax^2+by^2 \equiv 0 \pmod{l}$ ならば x, y はともに l で割り切れる．よって $cz^2+dw^2 \equiv 0 \pmod{l}$．$z$, w はともに l で割り切れないので $(-cd/l)=1$ が得られる．□

補題 2.14 (mod 2^n 上の 2 次形式)　a, b, c, d を奇数とする．

(1) $a \equiv b \equiv c \pmod{4}$ の場合を除いて，すべての $\bmod\ 2^n$ で $aX^2+bY^2+cZ^2$ は 0 を表す．

(2) $a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod{4}$ かつ $a+b+c+d \equiv 4 \pmod{8}$ の場合を除いて，すべての $\bmod\ 2^n$ で $aX^2+bY^2+cZ^2+dW^2$ は 0 を表す．

(3) すべての $\bmod\ 2^n$ で $aX^2+bY^2+cZ^2+2dW^2$ は 0 を表す．

証明　補題 2.12 (2) より，奇数 t に対して合同式 $X^2 \equiv t \pmod{2^n}$ がすべての n について解を持つことと $t \equiv 1 \pmod{8}$ は同値である．よって奇数 s, t に対して，$sX^2 \equiv t \pmod{8}$ が解を持てばすべての n について $sX^2 \equiv t \pmod{2^n}$ が解を持つ．

(1) $a \equiv b \equiv c \pmod{4}$ の場合，$aX^2+bY^2+cZ^2 \equiv a(X^2+Y^2+Z^2) \pmod{4}$ である．a は奇数なので，$a(X^2+Y^2+Z^2) \equiv 0 \pmod{4}$ であるためには $X^2+Y^2+Z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ でなければならない．ところが任意の整数 m に対して $m^2 \equiv 0$ または $1 \pmod{4}$ なので，$X^2+Y^2+Z^2$ が mod 4 で 0 を表すことは不可能である．よって $aX^2+bY^2+cZ^2$ が 0 を表すこともない．

逆に，例えば $a \not\equiv b \pmod{4}$ とする．このとき，$a+b \equiv 0$ または $4 \pmod{8}$ である．よって $X=Y=1$ かつ $Z=0$ または 2 とすると，$aX^2+bY^2+cZ^2 \equiv 0 \pmod{8}$ が得られる．合同式 $aX^2 \equiv -b-cZ^2 \pmod{2^n}$ の解を考えることによっ

て，$aX^2+bY^2+cZ^2$ が各 mod 2^n で 0 を表すことが分かる．

(2) $a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod 4$ かつ $a+b+c+d \equiv 4 \pmod 8$ の場合，X, Y, Z, W がすべて奇数の場合のみ $aX^2+bY^2+cZ^2+dW^2$ は mod 4 で 0 を表す．ところで m が奇数の場合 $m^2 \equiv 1 \pmod 8$ であることから，$aX^2+bY^2+cZ^2+dW^2$ が mod 8 で 0 を表すことはない．$a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod 4$ かつ $a+b+c+d \equiv 0 \pmod 8$ の場合，$X=Y=Z=W=1$ を考えれば $aX^2+bY^2+cZ^2+dW^2$ が mod 8 で 0 を表すので，(1) の証明のように $aX^2+bY^2+cZ^2+dW^2$ は mod 2^n で 0 を表す．ついで $a \not\equiv b \pmod 4$ の場合，(1) より $W=0$ とすれば $aX^2+bY^2+cZ^2+dW^2$ は mod 2^n で 0 を表す．

(3) (1) の結果を踏まえて $a \equiv b \pmod 4$ と仮定してよい．よって $a+b+2d \equiv 0$ または $4 \pmod 8$ である．よって $y=0$ または 2 とすれば $a+b+cy^2 2d \equiv \pmod 8$ である．よって各 mod 2^n で $aX^2+bY^2+cZ^2+2dW^2$ は 0 を表す．　□

補題 2.15 ($\mathbb{Q}$ **上の 2 次形式 (1)**)　p は素数，k は整数とし，$p \equiv 3 \pmod 4$, $p \nmid k$ かつ $4 \nmid k$ とする．

(1) $f_1 = X^2+Y^2-pZ^2-kW^2$ が $\mathbb{Q}$ で 0 を表すことと $k \not\equiv p \pmod 8$ は同値である．

(2) $f_2 = X^2+Y^2-pZ^2-pkW^2$ が $\mathbb{Q}$ で 0 を表すことと $(k/p)=-1$ かつ $pk \not\equiv p \pmod 8$ であることは同値である．

証明　(1) f_1 が $\mathbb{Q}$ で 0 を表すと仮定して，$k \not\equiv p \pmod 8$ を示す．$k \equiv p \pmod 8$ とすると，$1 \equiv -p \equiv -k \pmod 4$ かつ $2-p-k \equiv 4 \pmod 8$ となって，f_1 は mod 8 で 0 を表さない．

逆に $p \not\equiv k \pmod 8$ のとき，f_1 はすべての mod 2^n で 0 を表す．また，$l \neq p$ である奇素数 l に対して，$X^2+Y^2-pZ^2$ はすべての mod l^2 で 0 を表し，$X^2+Y^2-kW^2$ はすべての mod p^n で 0 を表す．よって，すべての奇素数 q に対して f_1 は mod q^n で 0 を表す．明らかに f_1 は $\mathbb{R}$ で 0 を表すので，Hasse-Minkowski (2) より f_1 は $\mathbb{Q}$ で 0 を表す．

(2) 補題 2.13 (2) を 2 次形式 $X^2+Y^2-pZ^2$ に適用すると，すべての奇素数 $l \neq p$ と mod l^n について f_2 は 0 を表す．補題 2.13 (3) と $(-1/p)=-1$ から f_2 が

mod p^n で 0 を表すことと $(-k/p) = -(k/p) = 1$ が同値であることが分かる．また $pk \not\equiv p \pmod 8$ であるときは，補題 2.14(3) より f_2 は mod 2^n で 0 を表す．よって Hasse-Minkowski (2) より (2) が得られる．　□

補題 2.16 (**$\mathbb{Q}$ 上の 2 次形式 (2)**)　p, q は異なる奇素数とし，$p \equiv 1 \pmod 4$ かつ $(q/p) = -1$ が成立っているとする．さらに k は整数で $p \nmid k$, $q \nmid k$ かつ $4 \nmid k$ とする．

(1) $f_1 = X^2 + qY^2 - pZ^2 - kW^2$ は $\mathbb{Q}$ で 0 を表す．

(2) $f_2 = X^2 + qY^2 - pZ^2 - pkW^2$ が $\mathbb{Q}$ で 0 を表すことと，$(k/p) = 1$ は同値である．

(3) $f_3 = X^2 + qY^2 - pZ^2 - qkW^2$ が $\mathbb{Q}$ で 0 を表すことと，$(k/q) = 1$ は同値である．

(4) $f_4 = X^2 + qY^2 - pZ^2 - pqkW^2$ が $\mathbb{Q}$ で 0 を表すことと，$(qk/p) = 1$ かつ $(pk/q) = 1$ であることが同値である．

証明　まず $f_1, \cdots, f_4$ は明らかにすべて $\mathbb{R}$ で 0 を表すことに注意する．

(1) すべての奇素数 l に対し，f_1 が mod l^n で 0 を表すことが補題 2.13 (2) から分かる．また，補題 2.14 から k の偶・奇にかかわらず，f_1 は mod 2^n で 0 を表す．よって $\mathbb{Q}$ で 0 を表す．

(2) f_2 が $\mathbb{Q}$ で 0 を表すとする．よって各 mod p^n で 0 を表すので，補題 2.13 (3) より $(-q/p) = 1$ または $(-k/p) = -1$．ところで，p は奇素数かつ $p \equiv 1 \pmod 4$ なので $(-1/p) = 1$ である．よって仮定より $(-q/p) = (q/p)(-1/p) = -1$．したがって $(-k/p) = 1$．よって $(k/p) = (-k/p)(-1/p) = 1$．逆に，$(k/p) = 1$ のとき $(-k/p) = 1$ なので補題 2.13 よりすべての奇素数 l に対して f_2 は mod l^n で 0 を表す．また補題 2.14 より各 mod 2^n でも f_2 は 0 を表すので，Hasse-Minkowski (2) より $\mathbb{Q}$ で 0 を表す．

(3), (4) の証明は演習問題とする．　□

補題 2.17　n, d を互いに素な整数，$p \equiv 3 \pmod 4$ を素数とする．$pn^2 + 2d^2$ の素因数分解を考えて，$pn^2 + 2d^2 = st^2$，ただし s, t は整数で s の各素因数の指数は 1 とする．このとき次の 2 つの条件は同値である．

(1) d は奇数かつ $p \nmid d$.

(2) $s \not\equiv p \pmod 8$ かつ，$s = pk$ ならば $(k/p) = -1$.

証明　((1) $\Longrightarrow$ (2))　d が奇数なので，$st^2 \equiv 2 - n^2 \equiv 1$ または $2 \pmod 4$ である．ところが $pt^2 \equiv 0$ または $3 \pmod 4$ なので $s \not\equiv p \pmod 8$ である．また，$p \nmid d$ なので $p \nmid st^2$，よって $p \nmid s$ となる．

((2) $\Longrightarrow$ (1))　もし d が偶数だとすると n は奇数である．よって $st^2 \equiv p \pmod 8$. したがって t が奇数となり $s \equiv p \pmod 8$ となって，仮定に反する．またもし $p|d$ なら，$p|st^2$ かつ $p^2 \nmid st^2$ である．よって $p|s$ かつ $p \nmid t$ である．$s = pk$ と書けば $kt^2 \equiv n^2 \pmod p$ である．よって $(k/p) = 1$ となって再び仮定に反す．　□

補題 2.18　n, d を互いに素な整数とする．奇素数 p, q は $p \equiv 1 \pmod 4$ かつ $(q/p) = -1$ を満たしている．$pqn^2 + 2d^2 = st^2$，ただし s, t は整数で s の各素因数の指数は 1 とする．このとき次の 2 つの条件は同値である．

(1) d は p と互いに素であり，かつ q とも互いに素である．

(2) $s = pa$ ならば $(a/p) = 1$ かつ $s = qb$ ならば $(b/q) = 1$ である．

証明　((1) $\Longrightarrow$ (2))　$\mathrm{GCD}(p, d) = 1$ かつ $\mathrm{GCD}(q, d) = 1$ ならば $p \nmid s$ かつ $q \nmid s$ であるので (2) が成り立っている．

((2) $\Longrightarrow$ (1))　もし $p|d$ ならば，$p|st^2$ かつ $p^2 \nmid st^2$ である．よって $p|s$ かつ $p \nmid t$. $s = pa$ と書けば，$at^2 \equiv qn^2 \pmod p$ である．したがって $(a/p) = (q/p) = -1$ となって仮定に反す．平方剰余の相互則から $(q/p) = (p/q)$ なので $q|d$ の場合も同様である．　□

さていよいよ主補題の証明にとりかかる．

主補題 1 の証明　$x \in \mathbb{Q}$ をとる．$p \equiv 3 \pmod 4$ を素数とする．$x = n/d$，ただし n, d は互いに素とする．$pn^2 + 2d^2 = st^2$ が成立つように整数 s, t を選ぶ．ここで s の素因数の指数は 1 とする．補題 2.15 と 2.17 より，$X^2 + Y^2 - pZ^2 - sW^2$ が $\mathbb{Q}$ で 0 を表すことと d が p で割り切れない奇数であることは同値である．このとき $X^2 + Y^2 - pZ^2$ が mod 4 で 0 を表さないことが補題 2.14 (1) から分かるので，$W \neq 0$ でなければばらない．よって，$A = tX/dW$, $B = tY/dW$．ここで $C = tZ/dW$ とおくと，等式 $A^2 + B^2 - pC^2 = px^2 + 2$ が得られる．　□

主補題 2 の証明　証明は，主補題 1 の場合と同様である．x を有理数，p, q を奇素数とし，$p \equiv 1 \pmod 4$ かつ $(q/p) = -1$ とする．$x = n/d$，ただし n, d は互いに素とする．$pqn^2 + 2d^2 = st^2$ を満たすように整数 s, t を選ぶ．ただし，s の各素因数の指数は 1 とする．補題 2.16 と 2.18 から，$X^2 + qY^2 - pZ^2 - sW^2$ が $\mathbb{Q}$ で 0 を表すことと，d, p と d, q がそれぞれ互いに素であることが同値であることがわかる．$W \neq 0$ であることを示すには，$f = X^2 + qY^2 - pZ^2$ が mod p^2 で 0 を表さないことを示せば十分である．$f(x, y, z) \equiv 0 \pmod{p^2}$ なら x, y, z がすべて p で割り切れることを示す．$x^2 + qy^2 \equiv 0 \pmod p$ かつ $(q/p) = -1$ なので $(-1/p) = 1$ より x, y がともに p で割り切れなければならない．したがって z も p で割り切れる．よって定義より f は mod p^2 で 0 を表さない．したがって $W \neq 0$ なので，$A = tX/dW, B = tY/dW$．ここで $C = tZ/dW$ とおくと，等式 $A^2 + qB^2 - pC^2 = pqx^2 + 2$ が得られる．　□

2.2.1　$\mathbb{Z}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ で定義可能である．

$\mathbb{Z}$ は $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1)$ で定義可能であることを示したが，$\mathbb{Z}_p$ と $\mathbb{Q}_p$ についても同様のことが言える．証明はもっと簡単である．

命題 2.19　p-進整数環 $\mathbb{Z}_p$ は p-進体 $(\mathbb{Q}_p, +, -, \cdot, 0, 1)$ の中で定義可能である．

証明　p-進体に関しては，N.Koblitz の明快な教科書 *“p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions”* (GTM, 58) を参照していただきたい．ここでは $p > 2$ の場合のみを示す．$\varphi(x) = \exists y(y^2 = px^2 + 1)$ とおく．$a \in \mathbb{Q}_p$ に対して，

$$a \in \mathbb{Z}_p \Longleftrightarrow \mathbb{Q}_p \models \varphi(a)$$

であることを示す．v を加法的 p-進付値とする．基本性質を復習しておこう．

(i) $v(x) \in \mathbb{Z}$,

(ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$,

(iii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$,

(iv) $v(x) < v(y) \Longrightarrow v(x + y) = v(x)$,

(v) $v(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{Z}_p$.

$v(x)$ は x を p-進展開したときに，p のどの冪から始まるかを示している．特に，$v(1) = 0, v(p) = 1$ である．$y^2 = pa^2 + 1$ が成り立っているとする．まず，$v(pa^2)$

$= v(p) + v(a^2) = 2v(a) + 1$ なので，$v(a) < 0$ ならば $v(pa^2)$ は負の奇数である．$v(1) = 0$ だから $v(pa^2) < v(1)$，よって $v(pa^2 + 1) = v(pa^2)$ である．一方 $v(y^2) = 2v(y)$ だから $v(y^2)$ は偶数である．したがって等式の左辺と右辺の偶奇が一致しないので矛盾する．よって $v(a) \geq 0$ でなければならない．よって $a \in \mathbb{Z}_p$ である．

逆に $a \in \mathbb{Z}_p$ とする．$F(X) = X^2 - (pa^2 + 1)$ を考える．仮定から $v(a) \geq 0$ なので $v(pa) = v(a) + 1 > 0$ である．さて，F の係数を mod p で考えたものを $\overline{F}$ とすると $\overline{F}(X) = X^2 - 1, \overline{F}'(X) = 2X$ である．よって $\overline{F}(1) = 0$ かつ $\overline{F}'(1) \neq 0$ である．したがって Hensel の定理から $F(b) = 0$ をみたす $b \in \mathbb{Z}_p$ が存在する．よって $\mathbb{Q}_p \models \varphi(a)$ が成り立つ． □

2.3 Wilkie の定理と Schanuel 予想

代数的数が可算個しかないこと，したがって超越数が非可算個存在することはよく知られている．よってほとんどすべての実数は超越数であるのだが，では具体的に超越数を提示せよと言われると困ってしまう．円周率 π や自然対数の底 e の超越性が証明されたのは，数学の長い歴史からすれば，19 世紀末というほんの最近のでき事であることを思い出そう．e と π が $\mathbb{Q}$ 上代数的に独立であるかとか，$e + \pi$ が無理数であるかどうかも知られていないのが現状である．

さて，最近オックスフォード大の Wilkie が，超越数に関して興味ある結果を証明した．超越数論の大定理という訳ではないが，代数的閉体の理論が量記号を消去することを応用した面白いものである．形は有名な Schanuel 予想と同じである．

定義 2.20 $H(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-1} z^i$ とおく．各 a_i は 0 でない整数であり，次の性質を持っている．

$$\forall i \geq 1\ \exists k \forall l \geq k\ (|a_{i+1}| > |a_i|^{i^l})$$

このとき，H を Liouville 関数という．

補題 2.21 r を 0 でない有理数とすると，$H(r)$ は Liouville 数である．したがって超越数である．

証明 Liouville 数の定義およびその超越性については，例えば『無理数と超越数』(塩川宇賢著，森北出版) の第 2 章を参照されたい． □

定理 2.22　H を Liouville 関数とする．$\theta_1, \cdots, \theta_n$ を互いに異なる，0 でない複素数とする．このとき，

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\theta_1, \cdots, \theta_n, H(\theta_1), \cdots, H(\theta_n)) \geq n$$

である．

注意 2.23　この定理の中の $H(z)$ を $\exp(z)$ で置き換えたものが，Schanuel 予想と呼ばれる予想である．

命題 2.24　整数係数の $m+n$ 変数多項式 $Q_1(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n), \cdots, Q_k(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n)$ を考える．このとき，変数の個数 m, n と，多項式の個数 k だけに依存して決まる定数 $c = c(m, n, k)$ が存在して次が成立つ．すなわち，各多項式の高さ，つまり多項式の係数の絶対値の和がそれぞれ高々 h で，次数がそれぞれ高々d だとすると，自由変数 $x_1, \cdots, x_n$ に関する論理式

$$\exists y_1 \cdots \exists y_m \bigwedge_{i=1}^{k} Q_i(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n) = 0 \tag{1}$$

は代数的閉体の理論 ACF の中で，高さが高々 h^{d^c} で次数が高々d^c のいくつかの多項式の間の等号と不等号だけからなるような，量記号を含まない論理式と同値である．

さらに $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$ が論理式 (1) を満たしているとする．このとき高さが高々 h^{d^c}，次数が高々d^c であるような n 変数の整数係数多項式 $q(X_1, \cdots, X_n)$ で $q(x_1, \cdots, x_n) \neq 0$ であるようなものが存在して，$\bigwedge_{i=1}^{k} Q_i(y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_n) = 0$ であるような $y_1, \cdots, y_m \in \mathbb{C}$ として，各 y_i $(i = 1, \cdots, m)$ が

$$y_i \leq h^{d^c} \cdot |q(x_1, \cdots, x_n)|^{-1}$$

であるようなものを取ることができる．

証明　∃ の消去は，終結式の理論を用いて行うことができる．終結式については代数の教科書，例えば "*Ideals, Varieties, and Algorithms*" (Cox, Little, O'Shea 著, Springer) を参照していただきたい．　□

命題 2.25　整数係数多項式 $Q_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, Q_k(x_1, \cdots, x_n)$ に対して，変数の個数 n と多項式の個数 k だけで定まる定数 $c > 0$ が存在して次が成立つ．多項式 $Q_1, \cdots, Q_k$ の高さがそれぞれ高々 h，次数がそれぞれ高々d であり，共通解が

$\mathbb{C}^n$ に存在しないならば，任意の実数 $R \geq 1$ に対して，

$$\inf \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} |Q_i(\omega_1, \cdots, \omega_n)| : \omega_i \in \mathbb{C},\ |\omega_i| \leq R,\ i = 1, \cdots, k \right\} > h^{-Rd^c} \tag{2}$$

が成立つ．

証明 Hilbert 零点定理の応用である．"*Introduction to Algebraic Independence Theory*" (Y.V.Nesterenko, P.Philippon 編，Lecture Notes in Mathematics 1752 巻，Springer) の 16 章である，*The Hilbert Nullstellensatz, Inequalities for Polynomials, and Algebraic Independence* を参照されたい． □

これらの 2 つの命題を用いて，Liouville 関数に関する Schanuel 予想を背理法で証明する．

自然数 $n \geq 1$ を 1 つ固定する．$U \subset \mathbb{C}^n$ を次のように定義する．

$$U = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq 0 \text{ かつ } z_i \neq z_j\ (i \neq j)\}$$

背理法の仮定として，ある $\overline{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in U$ に対して，

$$\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\theta_1, \cdots, \theta_n, H(\theta_1), \cdots, H(\theta_n)) \leq n - 1$$

が成り立っているとする．超越次数の意味を考えれば，$\overline{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ と $H(\overline{\theta}) = (H(\theta_1), \cdots, H(\theta_n))$ の間に代数的関係が 1 つ存在する毎に，$\mathbb{Q}(\overline{\theta}, H(\overline{\theta}))$ の $\mathbb{Q}$ 上の超越次数が 1 減るので，整数係数の $2n$ 変数多項式 $P_1(\bar{x}, \bar{y}), \cdots, P_{n+1}(\bar{x}, \bar{y})$ が存在して，

$$V = \{(\bar{z}, \bar{w}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n : P_i(\bar{z}, \bar{w}) = 0\ (i = 1, \cdots, n+1)\}$$

とおくと，

$$(\overline{\theta}, H(\overline{\theta})) \in V \tag{3}$$

かつ

$$\dim((U \times \mathbb{C}^n) \cap V) \leq n - 1 \tag{4}$$

が成り立っている． 各自然数 $d \geq 1$ に対して無限級数 $H(z)$ の d 次までの和を

$$H_d(z) = \sum_{i=1}^{d} a_i^{-1} z^i$$

とおき，関数 $\mu_d : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ を等式，

$$\mu_d(z, t_1, \cdots, t_n) = H_d(z) + z^{d+1} \cdot \sum_{j=1}^{n} t_j z^{j-1} \tag{5}$$

によって定義する．この μ_d を用いて写像 $\Phi_d : U \times \mathbb{C}^n \longrightarrow U \times \mathbb{C}^n$ を

$$\Phi_d(\bar{z}, \bar{t}) = (\bar{z}, \mu_d(z_1, \bar{t}), \cdots, \mu_d(z_n, \bar{t})) \tag{6}$$

によって定義する．$\Phi_d(\bar{z}, \bar{t})$ が全単射であることが次のようにして分かる．

$\Phi_d(z_1, \cdots, z_n, t_1, \cdots, t_n) = (z_1, \cdots, z_n, s_1, \cdots, s_n)$ とすると，

$$z_1^{d+1}(t_1 + t_2 z_1 + t_3 z_1^2 + \cdots + t_n z_1^{n-1}) = s_1 - H_d(z_1)$$

$$\vdots\ \vdots$$

$$z_n^{d+1}(t_1 + t_2 z_n + t_3 z_n^2 + \cdots + t_n z_n^{n-1}) = s_n - H_d(z_n)$$

である．すなわち，

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_n^{n-1} \\ & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s_1 - H_d(z_1))/z_1^{d+1} \\ (s_2 - H_d(z_2))/z_2^{d+1} \\ \vdots \\ (s_n - H_d(z_n))/z_n^{d+1} \end{pmatrix}$$

である．$\bar{z} \in U$ のとき，左辺の $n \times n$ 行列は正則であることを用いれば Φ_d が全単射であることがすぐに分かる．よって (4) から，

$$\dim(\Phi_d^{-1}((U \times \mathbb{C}^n) \cap V)) \leq n - 1$$

であることが分かる．したがって $\Phi_d^{-1}((U \times \mathbb{C}^n) \cap V)$ を $U \times \mathbb{C}^n$ の中の後半の $\mathbb{C}^n$ へ射影した集合の次元も高々 $n-1$ である．言い換えれば，$W \subseteq \mathbb{C}^n$ を論理式

$$\bar{t} \in W \Longleftrightarrow \exists z_1 \cdots \exists z_n \Bigg(\bigwedge_{i=1}^{n} (z_i \neq 0) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \neq j \leq n} (z_i \neq z_j) \\ \wedge \bigwedge_{i=1}^{n+1} P_i(\bar{z}, \mu_d(z_1, \bar{t}), \cdots, \mu_d(z_n, \bar{t})) = 0 \Bigg)$$

によって定義すると W の次元も高々 $n-1$ である．さらに各 $P_i(\bar{z}, \mu_d(z_1, \bar{t}), \cdots, \mu_d(z_n, \bar{t}))$ のなかの $\mu_d(z_1, \bar{t}), \cdots, \mu_d(z_n, \bar{t})$ に現れる有理数の分母を払い，不等号 $z_i \neq z_j$ を

$$\exists w((z_i - z_j) \cdot w - 1 = 0)$$

で置き換えれば，集合 W は (1) の形をした論理式で定義されていることが分かる．ただし，

$$k = O(1), \quad m = O(1), \quad \deg(Q_i) = O(d),$$

$$\mathrm{height}(Q_i) = (a_1 \cdots a_d)^{O(1)} \quad (i = 1, \cdots, k)$$

である．ここで，$O(1), O(d)$ はそれぞれ計算量を表す記号である．$O(1)$ は定数，$O(d)$ は d の線形 (1 次式) オーダーの計算量をそれぞれ表す．またこれら各定数は始めに与えられた多項式 $P_1, \cdots, P_{n+1}$ だけに依存して定まり自然数 d には依存しない．よって ACF における量記号消去により W は量記号なしの論理式で定義されている．より正確には，高さが $a_d^{d^{O(1)}}$ で，次数が $d^{O(1)}$ の多項式を用いた論理式によって定義されている．

したがって，命題 2.24 により，d を十分大きくとると，集合 W は，高さが $a_d^{d^{O(1)}}$ で次数が $d^{O(1)}$ の多項式たちだけを用いた，量記号なしの論理式で定義されることが分かる．

ところが十分大きな自然数 d に対して，$(a_{d+1}^{-1}, \cdots, a_{d+n}^{-1})$ は高さ $a_d^{d^{O(1)}}$，次数 $d^{O(1)}$ の多項式の解にはなりえない．よって $(a_{d+1}^{-1}, \cdots, a_{d+n}^{-1}) \notin W$ である．ところで，μ_d の定義から

$$\mu_d(z, a_{d+1}^{-1}, \cdots, a_{d+n}^{-1}) = H_{d+n}(z)$$

なので，

$$\forall \bar{z} \in U \left(\bigvee_{i=1}^{n+1} P_i(\bar{z}, H_{d+n}(\bar{z})) \neq 0 \right)$$

である．いま，$\bar{z} = (z_1, \cdots, z_n)$ に対して

$$\Delta(z_1, \cdots, z_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (z_j - z_i)$$

とし，

$$\Delta'(\bar{z}) := (z_1 \cdots z_n)^{d+1} \Delta(\bar{z})$$

とおくと，

$$\Delta'(\bar{z}) \neq 0 \Longleftrightarrow \bar{z} \in U$$

であるから，多項式 $P_1(\bar{z}, H_{d+n}(\bar{z})), \cdots, P_{n+1}(\bar{z}, H_{d+n}(\bar{z}))$ たちと $\Delta'(\bar{z}) \cdot z_{n+1} - 1$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の中で同時に 0 になることはない．ここで，始めにとった $\overline{\theta} \in U$ に対して

$$R = \max\{|\theta_1|, \cdots, |\theta_n|, |\Delta'(\overline{\theta})|^{-1}\}$$

とおく．命題 2.25 より，十分大きなすべての d に対して自然数 $i(d) \in \{1, \cdots, n+1\}$ が存在して

$$|P_{i(d)}(\overline{\theta}, H_{d+n}(\overline{\theta}))| \geq |a_{d+n}|^{-Rd^{O(1)}} = |a_{d+n}|^{-d^{O(1)}} \tag{6}$$

であることが分かる．

他方，Liouville 関数の定義から

$$|H_{d+n}(\overline{\theta}) - H(\overline{\theta})| = O(|a_{d+n+1}|^{-1} \cdot R^{d+n+1}) = O(|a_{d+n+1}|^{-1/2})$$

である．したがって中間値の定理より各 $i = 1, \cdots, n+1$ に対して

$$|P_i(\overline{\theta}, H_{d+n}(\overline{\theta})) - P_i(\overline{\theta}, H(\overline{\theta}))| = O(|a_{d+n+1}|^{-1/2})$$

である．よって (3) から，各 $i = 1, \cdots, n+1$ に対して

$$|P_i(\overline{\theta}, H_{d+n}(\overline{\theta}))| = O(|a_{d+n+1}|^{-1/2})$$

である．よって十分大きな d に対して，$|P_{i(d)}(\overline{\theta}, H_{d+n}(\overline{\theta}))| = O(|a_{d+n+1}|^{-1/2})$ である．a_{d+n} に比べて a_{d+n+1} は非常に大きいので，(6) に反する．よって定理が証明された．

3

幾何的モデル理論

1960 年代には数理論理学の分野で大きな事件が 2 つあった．1 つは P.Cohen による,「連続体仮説の独立性証明」であり，もう 1 つは M.Morley による「非可算範疇性定理の証明」である．前者はあまりにも有名であるが，後者は残念ながらそれほど有名ではない．本章ではまずこの「非可算範疇性定理」の証明を目指す．そのために，**強極小集合**という概念を紹介する．

ついで定義可能集合の複雑さ，すなわち論理式の複雑さを計る **Morley 階数**を定義する．この階数を用いると，2 つの元，あるいは集合の間に**独立性**の関係を導入することができる．このことによってモデルの中の要素間の相互関係を論ずることが可能になる．これはモデル理論における新らしい段階の始まりであった．

本章の中ほどで Morley の定理を証明したあと，J.T.Baldwin と A.Lachlan によるさらなる発展を紹介する．

その後話はより幾何的性格を帯びてくる．非可算範疇性を持つ理論をさらに深く研究しようとすると，強極小集合の持つ幾何的性質をより正確に把握しなければならない．

Hrushovski の結果を理解するには，代数的閉体を抽象的に再構成する方法と，1-基底群と呼ばれる群の構造定理を理解しなければならない．そのための準備が本章の後半部分の主な内容である．

3.1 強極小集合

代数的閉体 $(F, +, -, \cdot, 0, 1)$ を考える．$\mathrm{Th}(F)$ は量記号を消去するので，1 変数論理式は "多項式 $= 0$" の形の論理式の有限ブール和になっていることが分かる．し

たがって F の部分集合で定義可能なものは，有限集合かあるいは有限集合の補集合になっている．このような性質を持った構造を考えることにする．

定義 3.1　L を言語，M を無限な L-構造とする．

(1) $X \subseteq M$ を定義可能な任意の部分集合とする．X を定義する 1 変数論理式には M の元をパラメーターとして用いてもよいことにする．このような X に対して常に

$$X \text{ または } M \backslash X \text{ が有限集合}$$

であるとき，M は**極小構造**であるという．

(2) M と初等同値な任意の L-構造 N が極小構造であるとき，M は**強極小構造**であるという．

(3) $\varphi(v)$ を $L(M)$-論理式とする．M の部分集合

$$D = \{m \in M : M \models \varphi(m)\}$$

を考える．X を $L(M)$-論理式で定義される M の任意な部分集合とする．

$$X \cap D \text{ または } D \backslash X \text{ が有限集合}$$

であるとき，φ を極小と呼ぶ．φ が M の任意の初等拡大 N で極小であるとき φ を強極小という．

強極小構造を分類するために，付随する (組合せ) 幾何構造を次に説明する．強極小構造 M の部分集合 A に対し，A の要素をパラメーターとして持つ論理式で，解が有限個しか持たないものを **A-代数的な論理式**という．代数学では，体 F に対して F-係数代数方程式を考えるが，その一般化である．A に対し，A 上代数的な論理式の解になっているものをすべて集めた M の部分集合を，$\mathrm{acl}(A)$ と書く．このとき，(M, acl) は次の性質を持っている．任意の $A, B \subseteq M$ に対し，

(1) $A \subseteq B$ ならば $A \subseteq \mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(B)$

(2) $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$

(3)(交換法則) $a \in \mathrm{acl}(A \cup \{b\}) - \mathrm{acl}(A)$ ならば $b \in \mathrm{acl}(A \cup \{a\})$

(4) $a \in \mathrm{acl}(A)$ ならば $a \in \mathrm{acl}(Y)$ となる A の有限部分集合 Y が存在する．

問題 1　上の 4 つの性質のうち，(1), (2), (4) は簡単なので証明は演習問題とする．

これら 4 つの性質は極小構造に対しても成り立っている．4 つの性質のうち，3 番目が一番重要である．

命題 3.2 (交換法則) M を極小構造とする．このとき，任意の $A \subset M$ と $a, b \in M$ に対して，$a \in \mathrm{acl}(A \cup \{b\}) - \mathrm{acl}(A)$ ならば $b \in \mathrm{acl}(A \cup \{a\})$ である．

証明 $a \in \mathrm{acl}(A \cup \{b\}) - \mathrm{acl}(A)$ とする．定義から $L(A)$-論理式 $\varphi(x, y)$ が存在して，$M \models \varphi(a, b)$ かつ $\varphi(x, b)$ をみたす解は M の中に有限個，例えば m 個 (m は自然数) しか存在しない.「ちょうど m 個存在する」ということは論理式で書くことができるので，これを $\exists^{=m} x\varphi(x, b)$ と書くことにする．よって

$$M \models \varphi(a, b) \wedge \exists^{=m} x\varphi(x, b)$$

である．ここで $L(A \cup \{a\})$-論理式 $\varphi(a, y) \wedge \exists^{=m} x\varphi(x, y)$ を $\eta_a(y)$ とおく．

$b \notin \mathrm{acl}(A \cup \{a\})$ と仮定して矛盾を導く．M の極小性から，$\eta_a(M)$ は有限集合の補集合である．$Y \subset M$ を $\eta_a(y)$ を満たさない元全体とすると，Y は 有限集合で，$b' \in M \backslash Y$ ならば，

$$M \models \varphi(a, b') \wedge \exists^{=m} x\varphi(x, b')$$

である．

いま $|Y| = k$ とすると，

$$M \models \exists^{=k} y \neg \eta_a(y)$$

ここで $\psi(x) := \exists^{=k} y \neg \eta_x(y)$ とおくと，$\psi(x)$ は $L(A)$-論理式で，$M \models \psi(a)$ である．仮定より $a \notin \mathrm{acl}(A)$ なので，$\psi(M)$ は無限集合である．いま $a' \in \psi(M)$ とすると，k 個の元を除いた任意の $b' \in M$ に対して

$$M \models \varphi(a', b') \wedge \exists^{=m} x\varphi(x, b')$$

である．よって，$\psi(M)$ の中から相異なる $a_0, \cdots, a_m$ をとると，ある $b' \in M$ が存在して，各 $a_0, \cdots, a_m$ について

$$M \models \varphi(a_i, b') \wedge \exists^{=m} x\varphi(x, b')$$

が成り立つようにできる．すなわち，

$$M \models \bigwedge_{i=0}^{m} \varphi(a_i, b') \wedge \exists^{=m} \varphi(x, b')$$

となって矛盾する．よって $b \in \mathrm{acl}(A \cup \{a\})$ である． □

3.1.1　組合せ幾何

M を集合，$\mathcal{P}(M)$ を M の部分集合全体からなる集合とする．写像 $\mathrm{cl} : \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(M)$ が上の性質 (1)〜(4) を満たすとき，(M, cl) を**前幾何**という．前幾何は，

$$\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing \text{ かつ，各 } a \in M \text{ について } \mathrm{cl}(\{a\}) = \{a\}$$

という性質を持つとき，**幾何**と呼ばれる．

前幾何から幾何を構成することができる．(M, cl) を前幾何とする．M に同値関係 $\sim$ を次のように定義する．

$$x \sim y \Longleftrightarrow \mathrm{cl}(\{x\}) = \mathrm{cl}(\{y\})$$

この同値関係を用いて，$\hat{M} = (M \setminus \mathrm{cl}(\varnothing))/\sim$ とおく．この $\hat{M}$ に $\hat{\mathrm{cl}}$ を定義して $(\hat{M}, \hat{\mathrm{cl}})$ が幾何となるようにしたい．$\hat{M}$ の元を $\hat{a}$ と書くことにする．$\hat{A} \subseteq \hat{M}$ に対して，$\hat{\mathrm{cl}}(\hat{A}) = \{\hat{b} : b \in \mathrm{cl}(A)\}$ と定義する．また，$\hat{\mathrm{cl}}(\varnothing) = \varnothing$ とする．

問題 2　$(\hat{M}, \hat{\mathrm{cl}})$ が幾何の公理をみたすことを確認せよ．

前幾何 M とその部分集合 A に対して，新たな前幾何 (M, cl_A) を

$$\mathrm{cl}_A(X) = \mathrm{cl}(A \cup X) \quad (\text{ただし } X \subseteq M)$$

によって定義する．これを M の A への**局所化**と呼ぶ．

M の部分集合 A に対して，A の任意の要素 a が $a \notin \mathrm{cl}(A - \{a\})$ を満たすとき A は**独立**であるという．$B \subseteq A$ かつ $A \subseteq \mathrm{cl}(B)$ でありさらに B が独立であるとき，B は A の**基底**であるという．線形空間の基底は同じ濃度を持つが，次に示すように前幾何における部分集合の基底も皆同じ濃度を持っている．

命題 3.3　M を前幾何とする．集合 $A \subseteq M$ の基底 B, C は同じ濃度を持つ．

証明　**B が有限集合の場合：** 基底の要素の個数に関する数学的帰納法で証明する．$\mathrm{cl}(\varnothing) \subset A$ とし，$b, c_0, c_1 \in A \setminus \mathrm{cl}(\varnothing)$ とする．$B = \{b\}$ のとき，$|C| = 1$ を示す．すなわち $A = \mathrm{cl}(b) = \mathrm{cl}(c_0, c_1)$ と仮定して矛盾を導く．$b \in \mathrm{cl}(c_0)$ とすると，

$\mathrm{cl}(c_0, c_1) = \mathrm{cl}(c_0)$ となる．よって，$c_1 \in \mathrm{cl}(c_0)$ となり，c_0, c_1 が独立であることに反する．よって，$b \notin \mathrm{cl}(c_0)$．よって交換法則から $c_0 \notin \mathrm{cl}(b)$ となって矛盾．よって C も 1 個の要素からなる．

$B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ のとき，C の元 c で，$c \in \mathrm{cl}(b_1, \cdots, b_n) \setminus \mathrm{cl}(b_1, \cdots, b_{n-1})$ となるものが存在する．よって交換法則から，$\{c, b_1, \cdots, b_{n-1}\}$ は A の基底である．ここで，M の c での局所化 M_c を考えると，$\{b_1, \cdots, b_{n-1}\}$ と $C \setminus \{c\}$ はともに A の基底になっている．M_c に帰納法の仮定を適用すると $C \setminus \{c\}$ の要素の個数が $n-1$ であることがわかる．よって B, C ともに n 個の要素を持つ．したがって基底の濃度が有限な場合，それらはすべて同じ個数からなる．

B, C がともに無限集合の場合： B の任意の要素 b に対して $b \in \mathrm{cl}(C)$ だから，cl の持つ有限性により $b \in \mathrm{cl}(C^*)$ となる C の有限部分集合 C^* が存在する．このようなものの中で極小なものの 1 つを C_b と書く．こうして b に C_b を対応させることにより，写像

$$\tau : B \longrightarrow \mathcal{P}^{<\omega}(C) = \{X \subset C : |X| < \omega\}$$

が定義できる．各 $b \in B$ に対して，集合

$$\Delta_b = \{d \in B : C_d = C_b\}$$

は $\mathrm{cl}(C_b)$ の独立な部分集合である．ゆえに $|\Delta_b| \leq \dim(\mathrm{cl}(C_b)) = |C_b|$ である．よって τ は，有限対 1 写像である．C と $\mathcal{P}^{<\omega}(C)$ の濃度は等しいので $|B| \leq |C|$ が分かる．同様にして $|C| \leq |B|$ も示されるので，$|B| = |C|$ が示された．□

定義 3.4　集合 A の基底の濃度を**次元**といい，$\dim(A)$ と書く．$A \subseteq \mathrm{cl}(\varnothing)$ と $\dim(A) = 0$ は同値である．また，$A \supseteq B$ のとき，前幾何 M_B における A の次元を $\dim(A/B)$ と書く．

次元に関する次の加法定理は基本的である．証明は，線形空間の部分空間の次元に関する議論と同様である．

補題 3.5　前幾何 M において $B \subseteq A \subseteq M$ とする．このとき

$$\dim(A/B) + \dim(B) = \dim(A)$$

が成り立つ．

補題 3.6　前幾何 M において $A, B \subseteq M$ とする．このとき

$$\dim(A \cup B) \leq \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

証明　$A \cap B$ の基底を C とする．$C \cup A_0$ を A の基底，$C \cup B_0$ を B の基底とする．このとき $\mathrm{cl}(A_0 \cup B_0 \cup C) = A \cup B$．$\dim(A \cup B) = |A_0 \cup B_0 \cup C| \leq |A_0 \cup C| + |B_0 \cup C| - |C|$ が成立つ．□

定義 3.7　(1) $A = \mathrm{cl}(A)$ が成り立つとき，A は**閉じている**という．

(2) 任意の $A \subseteq M$ に対して $\mathrm{cl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}(\{a\})$ が成り立つとき，前幾何 M は**自明**であるという．

(3) 有限次元を持つ閉じた $A, B \subseteq M$ に対して，前幾何 M が次の等式

$$\dim(A \cup B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$$

を満たすとき，M をモジュラーな前幾何という．$\dim(A \cap B) > 0$ となるような有限次元を持つ閉じた A, B に対して次元公式が成り立つとき，**局所モジュラー**であるという．

(4) 極小集合 M は，付随する前幾何 (M, acl) が自明，モジュラー，あるいは局所モジュラーであるかに応じて，それぞれ自明，モジュラー，あるいは局所モジュラーであるという．

問題 3　前幾何 M は，ある $A \subseteq M$ における局所化 M_A がモジュラーであるとき，局所モジュラーであることを示せ．

ここで典型例をいくつか紹介する．

例 3.8 (集合)　M を構造の入っていない集合とする．このとき，各 $a \in M$ に対して，$\mathrm{acl}(a) = \{a\}$ かつ $\mathrm{acl}(\varnothing) = \varnothing$ が成り立つので，(M, acl) は自明な幾何である．

例 3.9 $(\mathbb{Z}, s)$　M を $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, s)$ のモデルとする (ただし $s(x) = x + 1$)．このとき，$\mathrm{acl}(\varnothing) = \varnothing$ かつ各 $A \subseteq M$ に対して $\mathrm{acl}(A) = \{s^n(a) : a \in A,\ n \in \mathbb{Z}\}$ が成り立つ．よって，(M, acl) は自明な前幾何であるが，幾何ではない．

例 3.10 (射影幾何) F を 斜体 (division ring)，無限集合 V を F 上の線形空間とする．言語 $L = \{+, 0, \lambda_a\ (a \in F)\}$ を考え，V を L-構造とみなす．ここで，$\lambda_a(x) = ax$ とする．このとき V は強極小集合であり，各 $A \subseteq V$ に対して，$\mathrm{acl}(A)$ は A によって張られる最小の F-部分空間である．線形代数の基本性質から，(V, acl) がモジュラーな前幾何であることが容易にわかる．

しかし (V, acl) は幾何ではない．なぜなら，$\mathrm{acl}(\varnothing) = \{0\}$ かつ各 $a \in V \setminus \{0\}$ に対して，$\mathrm{acl}(a)$ は a と 0 を通る直線だからである．この (V, acl) を次のようにして幾何にすることができる．$\mathbb{P}(F)$ を V において原点を通る直線全体の集合とする．また，$A \subseteq \mathbb{P}(F)$ に対して，A に属する直線の，原点以外の点全体で張られる V の部分空間に属する直線全体を $\mathrm{cl}(A)$ と定義する．このとき $(\mathbb{P}(F), \mathrm{cl})$ は幾何になる．これは，通常定義される射影幾何そのものである．また $\dim V = n$ のとき，$\dim \mathbb{P}(F) = n - 1$ である．

例 3.11 (アフィン幾何) V, F を上の例と同じものとする．V に別の幾何を定義する．V の部分空間 W と $a \in V$ に対して，$W + a = \{w + a : w \in W\}$ をアフィン空間という．$A \subseteq V$ に対して $\mathrm{cl}(A)$ を，A を含む最小のアフィン空間とする．また $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$ と定める．各点 a に対して，$\mathrm{cl}(\{a\}) = \{a\}$ である．よってこのようにして定義された V 上の前幾何は，幾何になっている．

しかし，この幾何はモジュラーではない．これを示すために，V から同一直線上にない 3 点 a, b, c をとる．このとき，$\dim(a, b, c, c + b - a) = 3$．一方，$\dim(a, b) = \dim(c, c + b - a) = 2$ かつ $\mathrm{cl}(a, b) \cap \mathrm{cl}(c, c + b - a) = \varnothing$ である ($\mathrm{cl}(a, b)$ は a, b を通る直線，$\mathrm{cl}(c, c + b - a)$ は a, b を通る直線を c だけ平行移動した直線である)．よって，この幾何はモジュラーではない．この前幾何を原点で局所化すると上述の射影幾何になるので，この幾何は局所モジュラーである．

例 3.12 (代数的閉体) K を超越次数無限な，代数的閉体とする．K は強極小集合なので (K, acl) は前幾何になる．この前幾何はモジュラーでない．証明は次の通り．k を超越次数有限な K の部分代数的閉体とする．K の k への局所化 K_k がモジュラーでないことを示そう．そのために a, b, $x \in K \setminus k$ を k 上代数的独立な元とする．$y = ax + b$ とおく．このとき $\dim(k(a, b, x, y)/k) = 3$ である．一方

$\dim(k(x,y)/k) = \dim(k(a,b)/k) = 2$ であり，さらに $\operatorname{acl}(k(x,y)) \cap \operatorname{acl}(k(a,b)) = k$ である．よって K_k はモジュラーでない．

問題 4　$\operatorname{acl}(k(x,y)) \cap \operatorname{acl}(k(a,b)) = k$ を示せ．

次に，前幾何がモジュラーかどうかを判定する基本的な補題を証明しよう．

補題 3.13　(M, cl) を前幾何する．このとき次の 3 つは同値である．

(1) (M, cl) はモジュラーである．

(2) $A \subseteq M$ が閉じていて，$b \in M$ かつ $x \in \mathrm{cl}(A, b)$ とすると，$x \in \mathrm{cl}(a, b)$ となる $a \in A$ が存在する．

(3) A, $B \subseteq M$ が閉じていて，$x \in \mathrm{cl}(A, B)$ とする．このとき $x \in \mathrm{cl}(a, b)$ となる $a \in A$, $b \in B$ が存在する．

証明　((1) $\Longrightarrow$ (2))　一般に $x \in \mathrm{cl}(X)$ ならば $x \in \mathrm{cl}(X_0)$ となる有限集合 X_0 が存在するので $\dim(A)$ が有限だと仮定してよい．$x \in \mathrm{cl}(b)$ だとすると結論がすでに成り立っている．よって $x \notin \mathrm{cl}(b)$ とする．モジュラーという仮定から，

$$\dim(A, b, x) = \dim A + \dim(\mathrm{cl}(b, x)) - \dim(A \cap \mathrm{cl}(b, x))$$

かつ

$$\dim(A, b, x) = \dim(A, b) = \dim A + \dim(\mathrm{cl}(b)) - \dim(A \cap \mathrm{cl}(b))$$

である．さらに $\dim(\mathrm{cl}(b, x)) = \dim(\mathrm{cl}(b)) + 1$ だから

$$\dim(A \cap \mathrm{cl}(b, x)) = \dim(A \cap \mathrm{cl}(b)) + 1$$

となって，$a \in \mathrm{cl}(b, x) \setminus \mathrm{cl}(b)$ となる $a \in A$ が存在する．交換法則より $x \in \mathrm{cl}(b, a)$ である．

((2) $\Longrightarrow$ (3))　A, $B \subseteq M$ は有限次元で閉じているとする．$\dim A$ に関する帰納法で示す．$\dim A = 0$ のときは明らか．$A = \mathrm{cl}(A_0, a)$，ただし $\dim A_0 = \dim A - 1$ と仮定する．$x \in \mathrm{cl}(A_0, B, a)$ とする．(2) から $x \in \mathrm{cl}(c, a)$ となる $c \in \mathrm{cl}(A_0, B)$ が存在する．帰納法の仮定から，$c \in \mathrm{cl}(a_0, b)$ となる $a_0 \in A_0$ と $b \in B$ が存在する．$x \in \mathrm{cl}(c, a) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(a_0, a), b)$ に対して (2) を再び用いて，$x \in \mathrm{cl}(a^*, b)$ となる $a^* \in \mathrm{cl}(a_0, a) \subseteq A$ の存在が導かれる．

((3) $\Longrightarrow$ (1)) A, $B \subseteq M$ は有限次元で閉じているとする．(1) を $\dim A$ に関する帰納法で示す．$\dim A = 0$ のときは明らか．$A = \mathrm{cl}(A_0, a)$，ただし $\dim A_0 = \dim A - 1$ かつ A_0 は閉じていると仮定する．この A_0 に対して，帰納法の仮定から

$$\dim(A_0, B) = \dim A_0 + \dim B - \dim(A_0 \cap B)$$

が成り立っているとする．まず $a \in \mathrm{cl}(A_0, B)$ とする．このとき $\dim(A_0, B) = \dim(A, B)$ であり，$a \notin A_0$ なので $\dim A = \dim A_0 + 1$ であることに注意する．さて $a \in \mathrm{cl}(A_0, B)$ だから (3) より $a \in \mathrm{cl}(a_0, b)$ となる $a_0 \in A_0$ と $b \in B$ が存在する．$a \notin \mathrm{cl}(a_0)$ なので，交換法則より $b \in \mathrm{cl}(a, a_0)$．したがって $b \in A$．ここで $b \notin A_0$ でなければ $a \in A_0$ となることに注意して $\dim(A \cap B) = \dim(A_0 \cap B) + 1$ を得る．よって

$$\dim(A, B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

が成り立つ．

次に $a \notin \mathrm{cl}(A_0, B)$ の場合を考える．この場合 $A \cap B = A_0 \cap B$ を示せばよい．もしこれら 2 つの集合が異なれば，$b \in \mathrm{cl}(A_0, a) \setminus \mathrm{cl}(A_0)$ となる $b \in B$ が存在する．交換法則より $a \in \mathrm{cl}(A_0, b)$ となって矛盾する．よって $\dim(A, B) = \dim(A_0, B) + 1$, $\dim A = \dim A_0 + 1$, $\dim(A \cap B) = \dim(A_0 \cap B)$ となりやはり

$$\dim(A, B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

が成り立つ． □

定義 3.14 M, N を L-構造，$A \subseteq M$, $B \subseteq N$ とする．A の元の任意の有限対 $\bar{a}$ と，任意の L-論理式 $\varphi(\bar{x})$ に対して，

$$M \models \varphi(\bar{a}) \Longleftrightarrow N \models \varphi(f\bar{a})$$

が成り立つとき，写像 $f : A \longrightarrow B$ を**初等的**という．

補題 3.15 M, N を L-構造とする．$A \subseteq M$, $B \subseteq N$ とし，$f : A \longrightarrow B$ を A から B への初等全単射とする．このとき f を $\mathrm{acl}(A)$ から $\mathrm{acl}(B)$ へ拡大することができる．

証明　Zorn の補題を用いて証明する．

(1) $f' : A' \longrightarrow B'$, $A \subseteq A' \subseteq \mathrm{acl}(A)$ であるような f の拡大となっている初等全単射のうちで極大なものを f' とする．$B' \subseteq \mathrm{acl}(B)$ が容易に分かる．

(2) $A' = \mathrm{acl}(A)$ を示す ($A' \neq \mathrm{acl}(A)$ として矛盾を導く)．$m \in \mathrm{acl}(A) \backslash A'$ とする．L-論理式 $\varphi(x, \bar{y})$ と $\bar{a} \in A$ が存在して，$M \models \varphi(m, \bar{a}) \wedge \exists^{=s} x\varphi(x, \bar{a})$ である．自然数 s を最小にするように $\varphi(x, \bar{a})$ を選んでおく．f は初等的だから，$N \models \exists^{=s} x\varphi(x, f\bar{a})$ なので，$N \models \varphi(n, f\bar{a})$ であるような $n \in \mathrm{acl}(B)$ を選ぶ．$f^* = f' \cup \{(m, n)\}$ とおく．

f^* は $A' \cup \{m\}$ から $\mathrm{acl}(B)$ への初等写像になっていることが次のようにして分かる．L-論理式 $\psi(u, \bar{v})$ と $\bar{c} \in A'$ に対して $M \models \psi(m, \bar{c})$ とする．s の最小性から

$$M \models \forall x(\varphi(x, \bar{a}) \longrightarrow \psi(x, \bar{c}))$$

である．そうでないとして，

$$M \models \exists x(\varphi(x, \bar{a}) \wedge \neg\psi(x, \bar{c}))$$

と仮定する．$\theta(x, \bar{a}) := \varphi(x, \bar{a}) \wedge \exists \bar{v}\psi(x, \bar{v})$ とおくと $M \models \theta(m, \bar{a})$ かつ $|\theta(M, \bar{a})| < s$ となって s の最小性に反する．よって

$$N \models \forall x(\varphi(x, f'\bar{a}) \longrightarrow \psi(x, f'\bar{c}))$$

である．よって $N \models \psi(n, f'\bar{c})$ である．逆向きも同様だから，f^* は初等写像になっている．これは f' の極大性に反するので，$A' = \mathrm{acl}(A)$ である．$B' = \mathrm{acl}(B)$ も容易に分かる．　□

定義 3.16　M を構造，$A, B \subset M$ を部分集合とする．任意の正整数 n に対して，$A \backslash B$ の元の任意の n 対 $\bar{a}, \bar{a}'$ が B 上全く同じタイプを持つとき，すなわち $\mathrm{tp}(\bar{a}/B) = \mathrm{tp}(\bar{a}'/B)$ であるとき，A は B 上**一様**であるという．

補題 3.17　M を極小構造とする．$A, B \subset M$ とし，A は M の前幾何の意味で B 上独立であるとする．このとき A は B 上一様である．

証明　$A \backslash B$ の異なる元からなる n 対，$\bar{a}, \bar{a}'$ を考える．n の値に関する数学的帰納法で示す．

$n=1$ のとき．$\mathrm{tp}(a/B)$ も $\mathrm{tp}(a'/B)$ もともに，$\{x \in M : M \models \varphi(x)\}$ が無限集合になるような $L(B)$-論理式全体である．したがって $\mathrm{tp}(a/B) = \mathrm{tp}(a'/B)$ である．

$n > 1$ の場合．長さ n まで B 上のタイプが同じであると仮定して，長さ $n+1$ のタイプも同じであることを示す．任意の $a_{n+1} \in A \backslash \{a_1, \cdots, a_n\}$ と $L(B)$-論理式 $\varphi(\bar{x}, y)$ に対して，A は B 上独立なので，$\models \varphi(\bar{a}, a_{n+1})$ と $\varphi(\bar{a}, M)$ が無限集合であることは同値である．帰納法の仮定から，$\varphi(\bar{a}, M)$ が無限集合であることと，$\varphi(\bar{a}', M)$ が無限集合であることは同値になる．よって任意の $a'_{n+1} \in A \backslash \{a'_1, \cdots, a'_n\}$ に対して $\models \varphi(\bar{a}', a'_{n+1})$ が成り立つ．よって長さ $n+1$ のタイプも同じである．

□

補題 3.18 極小構造 M は次の性質を持つ．$B \subset M$ と $a \in M \backslash B$ に対して $\mathrm{tp}(a/B) = \mathrm{tp}(a'/B)$ ならば $\alpha \in \mathrm{Aut}(M/B)$ が存在して $\alpha(a) = \alpha(a')$ が成り立つ．

証明 I, I' を，M の B 上の基底とする．I, I' は B 上一様だから，初等写像 $f : I \longrightarrow I'$ が存在する．$M = \mathrm{acl}(I) = \mathrm{acl}(I')$ なので，補題 3.15 より，写像 f を $\mathrm{Aut}(M/B)$ の元まで拡張することができる． □

問題 5 (1) $(\omega, <)$ は極小構造であるが，強極小構造でないことを示せ (注：$\omega = \mathrm{acl}(\varnothing)$ なので，$(\omega, <)$ の次元は 0 である)．

(2) $M_0 \prec M_1 \prec \cdots$ を極小構造の上昇列とする．$\bigcup_i M_i$ も極小構造であることを示せ．

注意 3.19 無限次元の極小構造は強極小構造になることが知られている (Hodges[15], p.170)．M を極小構造とする．「$0 < \dim(M) < \omega$ ならば M は強極小構造になる」という予想は 1 つの Zilber 予想と呼ばれ未解決問題であったが，最近池田宏一郎氏が Hrushovski の方法を用いて反例を構成した [27]．すなわち池田氏は，任意の正整数 n に対し，$\dim(M) = n$ であるような極小かつ強極小でない構造 M を構成した．

今後いろいろな場面で活躍する性質を 1 つ述べておく．一階のモデル理論の重要な性質としてコンパクト性定理がある．この定理があるので，ある性質を持つ要素が「有限個」しかないという事実を論理式で記述することができない．もちろん，ある具体的な正整数 n に対して「n 個以下しか存在しない」というようなことは記述で

きるが，一般的に「有限個」しかないということが表現できない．しかし，強極小構造 M の場合，$A \subset M$ が「有限部分集合である」ということ，あるいは「無限部分集合である」ということを論理式で表現することができる．このことを主張するのが次の補題である．

補題 3.20　M を強極小構造とする．$\varphi(x, \bar{m})$ が M の有限対 $\bar{m}$ を変えるごとに有限集合を定義するならば，$\varphi(x, \bar{y})$ だけに依存して定まる正整数 k が存在して，任意の $\bar{m} \in M$ に対して $|\varphi(M, \bar{m})| \leq k$ が成り立つ．

証明　背理法で示す．もし $\bar{m} \in M$ を変えるごとに $|\varphi(M, \bar{m})|$ の値に上界が存在しなければ，コンパクト性定理より M の初等拡大 N が存在して $\varphi(N, \bar{n})$ と $N \backslash \varphi(N, \bar{n})$ の両方が無限集合となるような $\bar{n} \in N$ が存在する．これは，M が強極小構造であることに反する．より詳しくは，補題 3.75 の証明参照のこと．　□

系 3.21　M を強極小構造とする．$\varphi(x, \bar{m})$ が M のある有限対 $\bar{m}$ に対して無限集合を定義するならば，$\varphi(x, \bar{y})$ だけに依存して定まる正整数 k が存在して，任意の $\bar{m} \in M$ に対して $|\varphi(M, \bar{m})| > k$ ならば $\varphi(M, \bar{m})$ は無限集合である．

定理 3.22　T を強極小理論，M, N を T のモデルとする．このとき，

$$M \cong N \Longleftrightarrow \dim(M) = \dim(N)$$

である．より一般的に，M と N は共通の初等部分モデル M_0 を持ち，$\phi(x)$ を M_0-上の強極小論理式とする．$\dim(\phi(M)) = \dim(\phi(N))$ ならば，$\phi(M)$ から $\phi(N)$ の上への 1 対 1 かつ初等的な写像が存在する．

証明　B を $\phi(M)$ の超越基底，C を $\phi(N)$ の超越基底とする．B, C はそれぞれ一様な集合である．$|B| = |C|$ なので，B から C の上への 1 対 1 な初等的写像 $f : B \longrightarrow C$ が存在する．$\phi(M) = \mathrm{acl}(B)$ かつ $\phi(N) = \mathrm{acl}(C)$ だから補題 3.15 より $\phi(M)$ から $\phi(N)$ の上への 1 対 1 かつ初等的な写像が存在する．　□

系 3.23　T を強極小理論とする．このとき T は非可算範疇的である．さらに $I(T, \aleph_0) \leq \aleph_0$ である．

証明 M を T の非可算モデルとすると，M の超越基底の濃度は M の濃度と等しい．よって M, N を T の非可算モデルで $|M| = |N|$ とすると，$M \cong N$ である．

M が可算モデルの場合は，$\dim(M) \leq \aleph_0$ である．T の可算モデル M は $\dim(M)$ によって一意に決まってしまうので $I(T, \aleph_0) \leq \aleph_0$ である． □

3.2 Morley 階数

定義可能集合に対してその複雑さを図る「Morley 階数」と呼ばれる概念を一般的に定義したい．基本的な考え方は非常に素朴である．定義可能集合 X を考える．X が互に共通部分を持たない無限個の定義可能部分集合 $X_0, X_1, \cdots$ の和集合となっていて，各 X_i の階数が m 以上のとき，X の階数は少なくとも $m+1$ 以上であると考えるのである．

Morley 階数の定義をしたあとで，強極小理論における Morley 階数の意味と性質，代数的閉体の理論における意味と性質を解説する．

3.2.1 Morley 階数の定義

定義 3.24 (局所 Morley 階数) M を L-構造とし，$\varphi(\bar{x})$ を $L(M)$-論理式とする．順序数 α に対して $\mathrm{RM}^M(\varphi) \geq \alpha$ ということを超限帰納法で，次のように定義する．

(1) $\mathrm{RM}^M(\varphi) \geq 0 \iff \varphi(M) \neq \varnothing$

(2) 極限順序数 α に対しては，

$$\mathrm{RM}^M(\varphi) \geq \alpha \iff \text{任意の順序数 } \beta < \alpha \text{ に対して } \mathrm{RM}^M(\varphi) \geq \beta$$

(3) α を任意の順序数とする．$(\mathrm{RM}^M(\varphi) \geq \alpha+1) \iff$ どの 2 つも互に矛盾する無限個の $L(M)$-論理式 $\psi_1(\bar{x}), \psi_2(\bar{x}), \cdots$ が存在して，各 $i \in \omega$ に対して $\mathrm{RM}^M(\psi_i) \geq \alpha$ かつ $\forall \bar{x}(\psi_i(\bar{x}) \longrightarrow \varphi(\bar{x}))$ である．

(4) $\varphi(M) = \varnothing$ の場合は $\mathrm{RM}^M(\varphi) = -1$ と定義する．

$\mathrm{RM}^M(\varphi) \geq \alpha$ かつ $\mathrm{RM}^M(\varphi) \not\geq \alpha+1$ のとき，$\mathrm{RM}^M(\varphi) = \alpha$ と定める．また，任意の順序数 α に対して $\mathrm{RM}^M(\varphi) \geq \alpha$ のとき，$\mathrm{RM}^M(\varphi) = \infty$ とする．

さて，この定義では，定義可能集合の Morley 階数，すなわち論理式 φ の Morley 階数は，φ のパラメーターが入っているモデル M に依存した形になっている．まず

M が $\aleph_0$-飽和の場合，$\mathrm{RM}^M(\varphi(\bar{v},\bar{a}))$ が $\mathrm{tp}^M(\bar{a})$ だけに依存することを示そう．

補題 3.25　$\theta(\bar{v},\bar{w})$ を L-論理式とする．M を $\aleph_0$-飽和構造とし，$\mathrm{tp}^M(\bar{a})=\mathrm{tp}^M(\bar{b})$ であるような $\bar{a},\bar{b}\in M$ をとる．このとき $\mathrm{RM}^M(\theta(\bar{v},\bar{a}))=\mathrm{RM}^M(\theta(\bar{v},\bar{b}))$ である．

証明　論理式 $\theta(\bar{v},\bar{w})$ と $\mathrm{tp}^M(\bar{a})=\mathrm{tp}^M(\bar{b})$ であるような $\bar{a},\bar{b}\in M$ に対し，

$$\mathrm{RM}^M(\theta(\bar{v},\bar{a}))\geq\alpha\Longleftrightarrow\mathrm{RM}^M(\theta(\bar{v},\bar{b}))\geq\alpha$$

が，任意の順序数 α に対して成り立つことを帰納法で示す．

$\mathrm{tp}^M(\bar{a})=\mathrm{tp}^M(\bar{b})$ なので，$\theta(M,\bar{a})=\varnothing$ と $\theta(M,\bar{b})=\varnothing$ は同値である．よって，$\mathrm{RM}^M(\theta(\bar{v},\bar{a}))\geq 0$ と $\mathrm{RM}^M(\theta(\bar{v},\bar{b}))\geq 0$ は同値になる．

α が極限順序数で，順序数 $\beta<\alpha$ に対して結論が正しいとする．このときも $\mathrm{RM}^M(\theta(\bar{v},\bar{a}))\geq\alpha$ と $\mathrm{RM}^M(\theta(\bar{v},\bar{b}))\geq\alpha$ は同値になる．

残るは，結論が α に対して成り立っているときに，$\mathrm{RM}^M(\theta(\bar{v},\bar{a}))\geq\alpha+1$ と $\mathrm{RM}^M(\theta(\bar{v},\bar{b}))\geq\alpha+1$ が同値になることを示すことである．$\mathrm{RM}^M(\theta(\bar{v},\bar{a}))\geq\alpha+1$ とすると，定義から ω 個の論理式 L-論理式 $\eta_i(\bar{v},\bar{w}_i)$ と $\bar{c}_i\in M$ が存在して $(i\in\omega)$，$\theta(M,\bar{a})$ は $\eta_i(M,\bar{c}_i)$ たちの和集合になっている．また $\eta_i(M,\bar{c}_i)$ たちは，どの 2 つも共通部分が空集合であり，$\mathrm{RM}^M(\eta_i(\bar{v},\bar{c}_i))\geq\alpha$ とする．M は $\aleph_0$-飽和なので，各 $m\in\omega$ に対して

$$\mathrm{tp}^M(\bar{a},\bar{c}_1,\cdots,\bar{c}_m)=\mathrm{tp}^M(\bar{b},\bar{d}_1,\cdots,\bar{d}_m)$$

が成り立つように，$\bar{d}_1,\cdots,\bar{d}_m,\cdots\in M$ をとることができる．このとき，

$$\eta_1(M,\bar{d}_1),\cdots,\eta_m(M,\bar{d}_m),\cdots$$

は互いに共通部分を持たず，和集合が $\theta(M,\bar{b})$ になっている．帰納法の仮定から $\mathrm{RM}^M(\eta_i(\bar{v},\bar{d}_i))\geq\alpha$ が成り立つので，$\mathrm{RM}^M(\theta(\bar{v},\bar{b}))\geq\alpha+1$ が成り立つ．逆も同様に証明できる．　□

M,N をともに $\aleph_0$-飽和なモデルとし，N は M の初等拡大になっているとする．このとき，論理式の Morley 階数は，M で計算したものと，N で計算したものとが一致する．

補題 3.26 M, N を，$\aleph_0$-飽和な L-構造，N を M の初等拡大とする．このとき，$L(M)$-論理式 φ に対して，$\mathrm{RM}^M(\varphi) = \mathrm{RM}^N(\varphi)$ が成り立つ．

証明 φ を $L(M)$-論理式とする．

$$\mathrm{RM}^M(\varphi) \geq \alpha \Longleftrightarrow \mathrm{RM}^N(\varphi) \geq \alpha$$

が，すべての順序数 α に対して成り立つことを，前の命題の証明と同じように行えばよい． □

系 3.27 M を L-構造，N_0, N_1 を M の初等拡大とし，N_0, N_1 はそれぞれ $\aleph_0$-飽和であるとする．このとき $L(M)$-論理式 φ に対し，

$$\mathrm{RM}^{N_0}(\varphi) = \mathrm{RM}^{N_1}(\varphi)$$

である．

証明 $N_0 \prec N_2$ かつ $N_1 \prec N_2$ となる N_2 が存在する．N_3 を N_2 の初等拡大で $\aleph_0$-飽和なものとすると，$\mathrm{RM}^{N_0}(\varphi) = \mathrm{RM}^{N_3}(\varphi) = \mathrm{RM}^{N_1}(\varphi)$ である． □

定義 3.28 (大域 Morley 階数) M を L-構造，φ を L-論理式とする．N を $\aleph_0$-飽和な M の初等拡大とする．$\mathrm{RM}^N(\varphi)$ の値を，論理式 φ の Morley 階数と定める．

今後，論理式の Morley 階数としては，大域 Morley 階数のみを考える．

問題 6 M を $\aleph_0$-飽和モデルとする．$\varphi(x, \bar{a}), \psi(x, \bar{b})$ をそれぞれ $L(M)$-論理式とする．$\varphi(M, \bar{a}) = \psi(M, \bar{b})$ ならば，$\mathrm{RM}(\varphi) = \mathrm{RM}(\psi)$ である．

定義 3.29 $M \models T, X \subseteq M^n$ とする．X が定義可能であるときは，上の補題によって X を定義している論理式の形に依存せず X の Morley 階数を考えることができる．X が $L(M)$-論理式 φ によって定義されているとすると，X の Morley 階数 $\mathrm{RM}(X)$ を $\mathrm{RM}(\varphi)$ によって定義する．

3.2.2 万有モデルと Morley 階数

論理式の Morley 階数の定義を反省してみると，どうも回り道をしている感じが強い．モデル理論というのは本来，ある理論のモデルたちの一般的性質を研究するのが目標のはずである．そのような問題意識のもとで，論理式の複雑さを考えるのが当

然であろう．

したがって，論理式の複雑さを計る「Morley 階数」を定義する場合にも,「大域的」な定義の方が自然である．ところが前小節で行ったことは，まず特定のモデルにおける Morley 階数を「局所 Morley 階数」として定義し，ついで $\aleph_0$-飽和なモデルにおける Morley 階数を「大域 Morley 階数」として定義した．さらに今後は「大域 Morley 階数」のみを考えるということで，論理式の「Morley 階数」というものを考えている．

初めから「大域 Morley 階数」を定義すれば話はもっと単純になる．理論の一般的性質を論じやすくするために**万有モデル**というものを考える．定義と基本性質は付録を参照していただきたい．

理論 T に対して，$\mathfrak{M}$ を万有モデルとし，T の一般的な性質を $\mathfrak{M}$ を用いて研究していくことにする．この万有モデルに対して Morley 階数を定義しておけば，前の小節でおこなったような回り道を避けることができる．

注意 3.30　今後 $\mathfrak{M} \models \varphi$ を単に $\models \varphi$ と書く．

3.2.3　Morley 次数

定義可能な集合 X の Morley 階数は，X を定義している論理式の Morley 階数によって定義する．$\mathrm{RM}(X) = \alpha$ とする．このとき X は，それぞれ Morley 階数 α を持ち，互いに共通部分を持たない，無限個の定義可能部分集合の和集合になっていることはない．しかし，同じ Morley 階数を持ち有限個の定義可能部分集合の和集合になっていることは考えられる．そのような場合，何個の部分集合たちの有限和になっているかを定義することにしたい．

命題 3.31　φ を $L(\mathfrak{M})$-論理式とし，$\mathrm{RM}(\varphi) = \alpha$ とする．このとき次の性質を持つ自然数 d が存在する．

$L(\mathfrak{M})$-論理式 $\psi_1, \cdots, \psi_n$ が存在して，各 $\psi_i(\mathfrak{M})$ が互に共通部分を持たない $\varphi(\mathfrak{M})$ の部分集合になっていて，それぞれ $\mathrm{RM}(\psi_i) = \alpha$ であり，和集合が $\varphi(\mathfrak{M})$ になっているならば $n \leq d$ である．d を φ の **Morley 次数** $\deg_M(\varphi)$ と書く．

証明　次の性質を持つ，$S \subset 2^{<\omega}$ と論理式の列 $(\phi_\sigma : \sigma \in S)$ を定義する．

(1) $\sigma \in S$ かつ $\tau \subseteq \sigma$ ならば，$\tau \in S$.

(2) $\phi_\varnothing$ は空列 (空論理式).

(3) $\sigma \in S$ のとき,

• $\mathrm{RM}(\phi_\sigma \wedge \psi) = \mathrm{RM}(\phi_\sigma \wedge \neg\psi) = \alpha$ となるような $L(\mathfrak{M})$-論理式 ψ が存在するときは, $\phi_{\sigma,0} := \phi_\sigma \wedge \psi$, $\psi_{\sigma,1} := \phi_\sigma \wedge \neg\psi$ とおく.

• 上のような ψ が存在しないときは, σ を拡張するような τ は S に存在しない.

S は 2 分木である. S は有限集合でなければならない. もし S が無限集合ならば, König の補題により無限な枝が存在する. そうすると Morley 階数が α である, 互いに共通部分を持たない定義可能部分集合が無限個存在することになって, $\mathrm{RM}(\phi) \geq \alpha + 1$ となってしまう.

$S_0 = \{\sigma \in S : \tau \supset \sigma$ ならば $\tau \notin S\}$ とおく. すなわち, 2 分木 S の終端になっている節をすべて集めた集合である. このとき $\deg_M(\phi) = d = |S_0|$ になっている. □

3.2.4 タイプの Morley 階数

論理式の Morley 階数と Morley 次数をもとにして, タイプの Morley 階数と Morley 次数を定義する.

定義 3.32 $A \subset \mathfrak{M}$ とする.

(1) $p \in S_n(A)$ に対して, タイプ p の Morley 階数 $\mathrm{RM}(p)$ を

$$\mathrm{RM}(p) = \inf\{\mathrm{RM}(\phi) : \phi \in p\}$$

によって定義する.

(2) $\mathrm{RM}(p) < \infty$ のとき,

$$\deg_M(p) = \inf\{\deg_M(\phi) : \phi \in p \text{ かつ } \mathrm{RM}(\phi) = \mathrm{RM}(p)\}$$

とおく.

(3) $\bar{a} \in \mathfrak{M}$ のとき, $\mathrm{RM}(\mathrm{tp}(\bar{a}/A))$ を $\mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ と書く.

問題 7 $X \subseteq \mathfrak{M}^n$ が定義可能ならば,

$$\mathrm{RM}(X) = \sup\{\mathrm{RM}(\bar{a}/A) : \bar{a} \in X,\ A \subset \mathfrak{M},\ |A| < |\mathfrak{M}|,\ X \text{ は } A \text{ 上定義可能 }\}$$

であることを示せ.

補題 3.33　$A \subset \mathfrak{M}$, $\bar{a}$, $b \in \mathfrak{M}$ とする．b が $A \cup \{\bar{a}\}$ 上代数的ならば，$\mathrm{RM}(\bar{a}, b/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ である．

証明　$A = \varnothing$ として一般性を失わない．Morley 階数の定義から，常に $\mathrm{RM}(\bar{a}, b) \geq \mathrm{RM}(\bar{a})$ が成り立つ (証明は演習問題とする)．したがって b が $\{\bar{a}\}$ 上代数的であるとき，$\mathrm{RM}(\bar{a}, b) \leq \mathrm{RM}(\bar{a})$ が成り立つことを Morley 階数に関する帰納法で示す．すなわち，任意の順序数 α に対して，$\mathrm{RM}(\bar{a}, b) \geq \alpha$ ならば $\mathrm{RM}(\bar{a}) \geq \alpha$ が成り立つことを示す．

$\alpha = 0$ のとき，$\mathrm{RM}(\bar{a}, b) \geq 0$ より $\models \varphi(\bar{a}, b)$ が成り立つ $\varphi(\bar{x}, y)$ が $\mathrm{tp}(\bar{a}, b)$ にある．よって "$\exists y \varphi(\bar{x}, y)$" $\in \mathrm{tp}(\bar{a})$ なので，$\mathrm{RM}(\bar{a}) \geq 0$ である．

α が極限順序数のときは明らかである．よって順序数 α に対して結論が正しいとし，$\mathrm{RM}(\bar{a}, b) \geq \alpha + 1$ とする．帰納法の仮定から $\mathrm{RM}(\bar{a}) \geq \alpha$ である．$\mathrm{RM}(\bar{a}) = \alpha$ として矛盾を導く．$\models \phi(\bar{a})$ であるような L-論理式 $\phi(\bar{v})$ を考える．$\mathrm{RM}(\phi(\bar{v})) = \alpha$ であり，$\mathrm{RM}(\phi \wedge \phi_1) = \alpha$ かつ $\mathrm{RM}(\phi \wedge \neg\phi_1) = \alpha$ となる L-論理式 ϕ_1 は存在しないものとする．

b は $\bar{a}$ 上代数的なので $\models \psi(\bar{a}, b)$ かつ $|\{x : \psi(\bar{a}, x)\}| = n$ であるような論理式 $\psi(\bar{v}, w)$ が存在する．論理式 $\hat{\phi}(\bar{v}, w)$ を次のように定義する．

$$\hat{\phi}(\bar{v}, w) := \phi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, w) \wedge |\{x : \psi(\bar{v}, x)\}| = n$$

そうすると，$\models \hat{\phi}(\bar{a}, b)$ であり $\mathrm{RM}(\bar{a}, b) > \alpha$ なので，$\mathrm{RM}(\hat{\phi}) > \alpha$ である．集合 $\hat{\phi}(\mathfrak{M})$ を互いに交わらない無限個の部分集合の直和に分割する論理式を，$\theta_1, \theta_2, \cdots$ とする．ただし，それぞれ $\mathrm{RM}(\theta_i) \geq \alpha$ とする．各論理式 $\exists w \theta_i(\bar{v}, w)$ を $\chi_i(\bar{v})$ とおく．$\mathrm{RM}(\theta_i) \geq \alpha$ なので $\models \theta_i(\bar{c}, d)$ かつ $\mathrm{RM}(\bar{c}, d) \geq \alpha$ となる $\bar{c}$, $d \in \mathfrak{M}$ が存在する．帰納法の仮定から $\mathrm{RM}(\bar{c}) \geq \alpha$ である．$\models \chi_i(\bar{c})$ なので，各 i について $\mathrm{RM}(\chi_i) \geq \alpha$ である．

実は，どんな自然数 m に対しても $\mathrm{RM}(\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_m) \geq \alpha$ である．もしそうでないとして，m を $\mathrm{RM}(\chi_1 \wedge \cdots \chi_m) < \alpha$ となる最小の自然数とする．そうすると

$$\mathrm{RM}(\chi_1 \wedge \cdots \wedge \chi_{m-1}) = \mathrm{RM}\left(\chi_m \wedge \neg \bigwedge_{i=1}^{m-1} \chi_i\right) \geq \alpha$$

となっている．しかしこれは，論理式 ϕ に対する仮定に反する．

$\mathfrak{M}$ は飽和的なのですべての i に対して $\models \chi_i(\bar{c})$ となる $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ が存在する．各 i に対して $\models \theta_i(\bar{c}, d_i)$ となる d_i が存在する．$\theta_i(\mathfrak{M})$ は互いに交わらないので d_1, d_2, $\cdots$ はすべて互いに異なる．したがってすべての i について $\models \psi(\bar{c}, d_i)$ となってしまって，$\psi(\bar{c}, x)$ の解は n 個しか存在しないという仮定に反する．したがって RM($\bar{a}$) $\geq \alpha + 1$ である． □

系 3.34 $X \subseteq \mathfrak{M}^n$, $Y \subseteq \mathfrak{M}^m$ はそれぞれ定義可能で，Morley 階数も定義されているとする．$f : X \longrightarrow Y$ を有限対 1 かつ X から Y の上への定義可能写像とする．このとき $\mathrm{RM}(X) = \mathrm{RM}(Y)$ である．

証明 $A \subset \mathfrak{M}$ とし，X, Y，さらに f はすべて A 上で定義されているとする．$f(\bar{a}) = \bar{b}$ とする．$\bar{b} \in \mathrm{dcl}(A,\ \bar{a})$ であり，f は有限対 1 なので $\bar{a} \in \mathrm{acl}(A,\ \bar{b})$ である．よって上の補題から

$$\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}, \bar{b}/A) = \mathrm{RM}(\bar{b}/A)$$

である．$\bar{a} \in X$ が $\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(X)$ を満たしていると

$$\mathrm{RM}(Y) \geq \mathrm{RM}(f(\bar{a})/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(X)$$

である．逆に，$\bar{b} \in Y$ が $\mathrm{RM}(\bar{b}/A) = \mathrm{RM}(Y)$ を満たしていると，f は X から Y の上への写像なので $f(\bar{a}) = \bar{b}$ となる $\bar{a} \in X$ が存在する．よって

$$\mathrm{RM}(X) \geq \mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{b}/A) = \mathrm{RM}(Y)$$

である．したがって $\mathrm{RM}(X) = \mathrm{RM}(Y)$ が示された． □

3.2.5 強極小理論における Morley 階数

定理 3.35 T を強極小理論とする．$A \subset \mathfrak{M}$, $\bar{a} \in \mathfrak{M}$ とする．このとき $\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \dim(\bar{a}/A)$ である．

証明 $\bar{a} = a_1, \cdots, a_k$ とする．$a_1, \cdots, a_k$ が A 上独立ならば，$\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = k$ であることを数学的帰納法で示す．

$k = 1$ のときは，a_1 が A 上独立ということは $a_1 \notin \mathrm{acl}(A)$ ということだから $\dim(a_1/A) = \mathrm{RM}(a_1/A) = 1$ である．

$k>1$ とし $a_1,\cdots,a_k$ は A 上独立であるとする．よって $\dim(\bar{a}/A)=k$ である．$\phi(\bar{v})\in \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ を Morley 階数が極小な論理式とする．

$\mathrm{RM}(\bar{a}/A)\geq k$ であることを示す．そのために，互いに異なる元 $b_1, b_2,\cdots\in \mathfrak{M}\backslash \mathrm{acl}(A)$ を取ってくる．各 i に対して，論理式 $\phi(\bar{v})\wedge v_1=b_i$ を $\psi_i(\bar{v})$ とおく．このとき $\psi_1(\mathfrak{M})$, $\psi_2(\mathfrak{M}),\cdots$ は互いに交わらない $\phi(\mathfrak{M})$ の部分集合である．$c_2,\cdots,c_k$ を $A\cup\{b_i\}$ 上独立な列とすると，$\mathrm{tp}(b_i,\bar{c}/A)=\mathrm{tp}(a_1,\cdots,a_k/A)$ である．特に，$\mathfrak{M}\models\phi(b_i,\bar{c})$ である．よって $\mathfrak{M}\models\psi_i(b_i,\bar{c})$ である．したがって

$$\mathrm{RM}(\psi_i)\geq \mathrm{RM}(b_i,\bar{c}/A)\geq \mathrm{RM}(\bar{c}/A)$$

であり，帰納法から $\mathrm{RM}(\bar{c}/A)\geq k-1$ である．したがって $\mathrm{RM}(\psi_i)\geq k-1$ かつ $\mathrm{RM}(\phi)\geq k$ なので $\mathrm{RM}(\bar{a}/A)\geq k$ である．

次に $\mathrm{RM}(\bar{a}/A)\leq k$ であることを示す．$A\subset M$ を $\aleph_0$-飽和モデルとする．$d_1,\cdots,d_k$ が M 上独立ならば，$\mathrm{tp}(\bar{a}/A)=\mathrm{tp}(\bar{d}/A)$ なので，初めから $a_1,\cdots,a_k$ が M 上独立であるとしてよい．$\psi(\bar{v})$ を L_M-論理式で $\psi(\mathfrak{M})\subset\phi(\mathfrak{M})$ かつ $\neg\psi(\bar{a})$ を満たしているとする．$\mathrm{RM}(\psi)<k$ を示せば十分である．もし $\models\psi(\bar{b})$ ならば，$\mathrm{tp}(\bar{b}/M)\neq \mathrm{tp}(\bar{a}/M)$ なので $b_1,\cdots,b_k$ は M 上独立ではない．必要ならば文字の付け替えをおこなって $b_k\in \mathrm{acl}(M,b_1,\cdots,b_{k-1})$ と仮定する．$\theta(v_1,\cdots,v_k)$ を，自然数 $s\in\omega$ に対して $|\{w:\theta(b_1,\cdots,b_{k-1},w)\}|=s$ であるような $L(M)$-論理式とする．ψ を

$$\psi(v_1,\cdots,v_k)\wedge|\{w:\theta(v_1,\cdots,v_{k-1},w)\}|=s$$

で置き換えて，$\models\psi(\bar{c})$ ならば $c_k\in \mathrm{acl}(M,c_1,\cdots,c_{k-1})$ であると仮定する．

さて $c_1,\cdots,c_k$ を $\models\psi(\bar{c})$ かつ $\mathrm{RM}(\psi)=\mathrm{RM}(\bar{c}/M)$ であるようにとる．自然数 $l\leq k$ に対して，$c_1,\cdots,c_l$ が M 上独立で $\bar{c}\in \mathrm{acl}(M,c_1,\cdots,c_l)$ と仮定する．補題 3.33 より，

$$\mathrm{RM}(\psi)=\mathrm{RM}(\bar{c}/M)=\mathrm{RM}(c_1,\cdots,c_l/M)$$

であり，帰納法の仮定から $\mathrm{RM}(c_1,\cdots,c_l/M)=l$ である．　□

強極小理論においては,「有限」とか「無限」が定義可能であったことを用いると，Morley 階数も定義可能であることが分かる．

補題 3.36 T を強極小理論とする．$C \subseteq \mathfrak{M}^{m+n}$ を定義可能集合とする．$\bar{a} \in \mathfrak{M}^m$ に対して，$C_{\bar{a}} = \{\bar{x} \in \mathfrak{M}^n : (\bar{a}, \bar{x}) \in C\}$ とおく．各 $k \leq n$ に対して

$$Y_{n,k} = \{\bar{a} \in \mathfrak{M}^m : \mathrm{RM}(C_{\bar{a}}) \geq k\}$$

は定義可能である．

証明 数学的帰納法で示す．

$n = 1$ のとき．$\mathfrak{M}$ は強極小なので，自然数 N が存在して，すべての $a \in \mathfrak{M}$ に対して

$$|C_a| < N \text{ または } |\mathfrak{M} \backslash C_a| < N$$

である．よって

$$\mathrm{RM}(C_a) \geq 1 \Longleftrightarrow |C_a| > N$$

であるので，集合 $Y_{1,1}$ は定義可能である．$Y_{1,0} = \{a : \exists \bar{w}(\bar{w} \in C_a)\}$ も明らかに定義可能である．

$n = s + 1$ のとき．k に関する帰納法で示す．$Y_{n,0} = \mathfrak{M}^n$ は定義可能である．$\bar{a} \in \mathfrak{M}^m$ に対して，$B_{\bar{a}} = \{\bar{b} \in \mathfrak{M}^s : \exists y(\bar{b}, y) \in C_{\bar{a}}\}$ とおく．$\mathrm{RM}(B_{\bar{a}}) \geq k$ ならば，$\mathrm{RM}(C_{\bar{a}}) \geq k$ である．

$\mathrm{RM}(B_{\bar{a}}) < k$ のときを考える．$\bar{b} \in B_{\bar{a}}$ かつ $(\bar{b}, c) \in C_{\bar{a}}$ とすると，$\dim(\bar{b}, c) = \dim(\bar{b}) + \dim(c/\bar{b})$ である．

$$A_{\bar{a}} = \{\bar{b} \in \mathfrak{M}^s : \{y : (\bar{b}, y) \in C_{\bar{a}} \text{ は無限集合 }\}\}$$

とおく．$n = 1$ のときと同じように，$\bar{a}$ の取り方とは無関係に自然数 N が存在して

$$\bar{b} \in A_{\bar{a}} \Longleftrightarrow |\{y : (\bar{b}, y) \in C_{\bar{a}}\}| > N$$

が成り立つ．よって $A_{\bar{a}}$ は定義可能であり，

$$\mathrm{RM}(C_{\bar{a}}) \geq k \Longleftrightarrow \mathrm{RM}(A_{\bar{a}}) \geq k - 1$$

である．したがって，

$$\mathrm{RM}(C_{\bar{a}}) \geq k \Longleftrightarrow (\mathrm{RM}(B_{\bar{a}}) \geq k \vee \mathrm{RM}(A_{\bar{a}}) > k - 1)$$

である．よって帰納法から $Y_{n,k}$ は定義可能である． □

3.2.6　代数的閉体における Morley 階数

定義 3.37　K を代数的閉体とする．$V \subseteq K^n$ を既約代数的多様体とする．

$$I(V) = \{f(\overline{X}) \in K[X_1, \cdots, X_n] : \forall \bar{a} \in V\,(f(\bar{a}) = 0)\}$$

とおく．V は既約なので $I(V)$ は素イデアルである．

$$I(V) = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_m \subset K[\overline{X}]$$

となるような素イデアルの上昇列が存在する m の最大値を，V の Krull 次元と呼ぶ．

Hilbert 零点定理から，$I(V)$ が極大イデアルならば K の元 $a_1, \cdots, a_n$ が存在して $I(V) = (X_1 - a_1, \cdots, X_n - a_n)$ となるので，V の Krull 次元は 0 である．Krull 次元と関数体の超越次数が等しいことも知られている．

$V \subseteq K^n$ を既約代数的多様体とする．V の座標環 $K[\overline{X}]/I(V)$ の商体を V の関数体と呼び $K(V)$ と書く．

定理 3.38　K を代数的閉体，$V \subseteq K^n$ を既約代数的多様体とする．このとき

$$V \text{ の Krull 次元} = \mathrm{tr.deg}_K K(V)$$

である．

系 3.39　K を代数的閉体とする．多様体の Krull 次元と Morley 階数は一致する．すなわち，$V \subseteq K^n$ を既約多様体とすると，

$$\mathrm{RM}(V) = V \text{ の Krull 次元}$$

である．

証明　V の Krull 次元に関する帰納法で示す．V の Krull 次元が 0 のときは，$I(V)$ は極大イデアルなので V は一点集合である．よって $\mathrm{RM}(V) = 0$ である．

V の Krull 次元が $k > 0$ のとき．多様体 V は

$$V = \{\bar{a} \in K^n : f(\bar{x}) \in I(V)\}$$

という集合である．Hilbert 基底定理から $I(V)$ は有限生成なので，$L(K)$-論理式 $\phi(\bar{v})$ によって定義される．$\bar{a} \in \phi(\mathfrak{M})$ に対して，

$$I_{\bar{a}} = \{f(\bar{X}) \in K[\overline{X}] : f(\bar{a}) = 0\}$$

とおくと $I_{\bar{a}}$ は素イデアルなので，$V_{\bar{a}} = V(I_{\bar{a}})$ は既約である．$V_{\bar{a}} \subseteq K^n$ かつ $V_{\bar{a}} \subseteq V$ である．$V_{\bar{a}} \subset V$ のときは，$V_{\bar{a}}$ の Krull 次元は高々 $k-1$ であるので帰納法の仮定から，

$$\mathrm{RM}(\bar{a}/K) \leq \mathrm{RM}(V_{\bar{a}}) \leq k-1$$

である．

$V_{\bar{a}} = V$ のときは，$I_{\bar{a}} = I(V)$ なので $K(\bar{a}) = K(V)$ である．よって $\mathrm{RM}(\bar{a}/K) = \dim(\bar{a}/K)$ である．代数的閉体のモデル理論では，モデル理論の意味での「代数的」という概念と，代数学の意味での「代数的」という概念が一致する．よって $\mathrm{RM}(\bar{a}/K) = \mathrm{tr.deg}_K K(V) = k$ である．

$$\mathrm{RM}(V) = \max\{\mathrm{RM}(\bar{a}/K) : \bar{a} \in \phi(\mathfrak{M})\}$$

なので，$\mathrm{RM}(V) = k$ である． □

K を代数的閉体，$\mathbb{K}$ を万有モデルとする．$V \subseteq K^n$ を既約多様体とすると，

$$V(\mathbb{K}) = \{\bar{a} \in \mathbb{K}^n : f(\bar{a}) = 0 \ (f(\overline{X}) \in I(V)\}$$

を考えることができる．$K \prec \mathbb{K}$ なので $V(\mathbb{K})$ も既約多様体である．

定義 3.40 $V \subseteq K^n$ を既約多様対とする．$\bar{a} \in V(\mathbb{K})$ とする．V の任意の既約真部分ザリスキー閉集合 $W \subset V$ に対して $\bar{a} \notin W(\mathbb{K})$ であるとき，$\bar{a}$ を V の K 上の**一般点**と呼ぶ．

一般点というのは，V を定義する「最も一般的な」性質を持っている．この「最も一般的」という部分を次のように言い換えることも可能である．

補題 3.41 $V \subseteq K^N$ を既約なザリスキー閉集合とする．$\bar{a} \in V(\mathbb{K})$ を考える．このとき，

$$\begin{aligned} \bar{a} \text{ は } V \text{ の } K \text{ 上の一般点である} &\iff I_{\bar{a}} = I(V) \\ &\iff \mathrm{RM}(\bar{a}/K) = \mathrm{RM}(V) \end{aligned}$$

が成り立っている．

3.3　ω-安定理論

前節で論理式の Morley 階数と Morley 次数を定義した．Morley 階数と Morley 次数がともに 1 である論理式が強極小論理式であり，幾何的モデル理論では重要な研究対象である．

理論 T の性質として,「どのような集合を定義できるか」という基準を考えることができる．Morley 階数や Morley 次数を定義することができる集合というのは比較的扱いやすいことが分かっている．

定義 3.42　T を理論，$\mathfrak{M}$ を T の万有モデルとする．任意の $L(\mathfrak{M})$-論理式 ψ に対して Morley 階数が定まる，すなわち $\mathrm{RM}(\psi) < \infty$ であるような理論を ω-安定理論

定理 3.43　T を可算言語 L の完全理論とする．T が ω-安定理論ならば T は次の性質を持つ．

(1) 任意の可算集合 $A \subset \mathfrak{M}$ と自然数 n に対して $|S_n(A)| \leq \aleph_0$.

(2) 次の意味で順序を定義しない．L-論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ と無限列 $\bar{a}_0, \bar{b}_0, \cdots, \bar{a}_n, \bar{b}_n, \cdots$ が存在し，任意の自然数 $i, j \in \omega$ に対して

$$\models \varphi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \Longleftrightarrow i < j$$

が成り立つとき，T は順序を定義するという．T が ω-安定ならば，T は順序を定義しない．

(3) 任意のタイプは定義可能である．すなわち $A \subseteq M \models T$ と $p(\bar{x}) \in S_n(A)$ に対し，任意の論理式 $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ について

$$\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p(\bar{x}) \Longleftrightarrow \models d_p\varphi(\bar{a})$$

であるような L-論理式 $d_p\varphi(\bar{y})$ が存在する．

(4) 任意の $A \subset \mathfrak{M}$ に対して A 上の素モデル M で A 上原子的なものが存在する．ここで M が A 上の素モデルであるというのは，任意のモデル $N \supset A$ に対して，1 対 1 な初等写像 $f : M \longrightarrow N$ が存在することである．また M が A 上原子的であるというのは，任意の $\bar{m} \in M \backslash A$ に対して，$\mathrm{tp}(\bar{m}/A)$ が孤立的であるということである．

注意 3.44 (2), (3) は ω-安定理論よりさらに広い概念である安定理論に対して成り立つ.

証明は例えば『モデルの理論』(坪井明人著, 河合文化教育研究所) を参照していただきたい. この節では, まず Morley 階数を用いて独立性の概念を定義する. ついで ω-安定理論の性質のうち, 後で証明する Morley 非可算範疇性定理の証明に必要なものを紹介する.

3.3.1 Morley 階数と, 独立性の概念

ここでは T を ω-安定な理論, $\mathfrak{M}$ を T の万有モデルとする.

定義 3.45 $A \subset B \subset \mathfrak{M}$ とし, $p \in S_n(A), q \in S_n(B)$ で論理式の集合として $p \subset q$ となっているとする.

(1) $\mathrm{RM}(q) < \mathrm{RM}(p)$ のとき, q を p の**分岐拡大**という.

(2) $\mathrm{RM}(q) = \mathrm{RM}(p)$ のとき, q を p の**非分岐拡大**という.

非分岐拡大の存在は, 次の定理によって保証される.

定理 3.46 $A \subset B \subset \mathfrak{M}$ とし, $p \in S_n(A)$ をとる.

(1) p の非分岐拡大 $q \in S_n(B)$ が少なくとも 1 つ存在する.

(2) p の非分岐拡大は, $S_n(B)$ の中に高々 $\deg_M(p)$ 存在する. $A \subset M$ とし, M が $\aleph_0$-飽和なモデルである場合, $S_n(M)$ の中に p の非分岐拡大は, ちょうど $\deg_M(p)$ だけ存在する.

(3) $\deg_M(p) = \deg_M(q)$ であるような p の非分岐拡大 $q \in S_n(B)$ は高々 1 つしか存在しない. 特に $\deg_M(p) = 1$ である場合は, $S_n(B)$ の中に p の非分岐拡大 q は 1 つしか存在しない.

証明 $\phi(\bar{v}) \in p$ を Morley 階数と Morley 次数がともに最小な論理式とし, $\mathrm{RM}(\phi) = \alpha$ とする.

(1) B を含む $\aleph_0$-飽和モデル M を考える. $\psi(\bar{v})$ を $\psi(\mathfrak{M}) \subseteq \phi(\mathfrak{M}), \mathrm{RM}(\psi) = \alpha, \deg_M(\psi) = 1$ であるような $L(M)$-論理式とする.

$$q = \{\theta(\bar{v}, \bar{b}) : \theta \text{ は } L\text{-論理式}, \bar{b} \in B, \mathrm{RM}(\theta(\bar{v}, \bar{b}) \wedge \psi(\bar{v})) = \alpha\}$$

とおく．$\mathrm{RM}(\psi)=\alpha$ なので，任意の $L(B)$-論理式 $\chi(\bar{v})$ に対して，$\chi\in q$ または $\neg\chi\in q$ である．$\deg_M(\psi)=1$ なので，χ_1，$\chi_2\in q$ ならば $\chi_1\wedge\chi_2\in q$ である．よって特に，すべての $L(B)$-論理式 χ に対して χ か $\neg\chi$ のどちらか一方だけが q に入る．したがって $q\in S_n(B)$ であり，$p\subseteq q$ かつ $\mathrm{RM}(q)=\alpha$ である．

(2) $q_1,\cdots,q_m\in S_n(B)$ を p の異なる非分岐拡大とする．各 i に対して，Morley 階数と Morley 次数が極小な論理式 $\psi_i(\bar{v})\in q_i$ を選ぶ．このとき $\mathrm{RM}(\psi_i)=\alpha$ であり，各 $i\neq j\leq\deg_M(p)$ に対して，$\mathrm{RM}(\psi_i\wedge\psi_j)<\alpha$ である．よって $m\leq\deg_M(p)$ である．

$A\subseteq M$ であるような $\aleph_0$-飽和モデル M の場合は，$\psi_1,\cdots,\psi_{\deg_M(p)}\in p$, $\mathrm{RM}(\psi_i)=\alpha$，さらに $i\neq j\leq\deg_M(p)$ に対して $\mathrm{RM}(\psi_i\wedge\psi_j)<\alpha$ であるような論理式が存在する．各 i に対して $p\subseteq q_i\in S_n(M)$ で $\psi_i\in q_i$ かつ $\mathrm{RM}(q_i)=\alpha$ となるようなものが存在する．$i\neq j$ ならば $\psi_j\notin q_i$ なので q_i は互いに異なる．

(3) 演習問題とする．□

補題 3.47　T を ω-安定理論，M をモデルとする．任意の $p\in S(M)$ は定格的である，すなわち $M\subset A\subset\mathfrak{M}$ に対して，$S(A)$ の中に p の非分岐拡大は 1 個しかない．

証明　これも一般の安定理論で成り立つ．証明は前掲書『モデルの理論』参照．□

補題 3.48　M を $\aleph_0$-飽和モデルとし，$\phi(\bar{v})$ を $\mathrm{RM}(\phi)=\alpha$ であるような $L(M)$-論理式，さらに $\psi(\bar{v})$ を $\mathrm{RM}(\phi\wedge\psi)=\alpha$ であるような $L(\mathfrak{M})$-論理式とする．このとき，$\mathfrak{M}\models\phi(\bar{a})\wedge\psi(\bar{a})$ であるような $\bar{a}\in M$ が存在する．

証明　Morley 階数 α に関する帰納法で示す．$\alpha=0$ のときは，$\phi(M)=\phi(\mathfrak{M})$ は有限集合である．

$\alpha>0$ とする．$\deg_M(\phi)=1$ のときを示せば十分である．このとき $\mathrm{RM}(\phi\wedge\neg\psi)=\beta<\alpha$ となる β が存在する．M は $\aleph_0$-飽和だから，$\phi(\mathfrak{M})$ を互いに交わらない無限個の部分集合の直和に分割する $L(M)$-論理式 $\theta_0(\bar{v}),\theta_1(\bar{v}),\cdots$ が存在する．ただし各 i について $\mathrm{RM}(\theta_i)=\beta$ である．$\mathrm{RM}(\phi\wedge\neg\psi)=\beta$ なので，$\mathrm{RM}(\neg\psi\wedge\theta_i)<\beta$ となる i が存在する．よって $\mathrm{RM}(\psi\wedge\theta_i)=\beta$ であり，帰納法の仮定から $\models\psi(\bar{a})\wedge\theta_i(\bar{a})$ かつ $\models\psi(\bar{a})\wedge\phi(\bar{a})$ となる $\bar{a}\in M$ が存在する．□

定理 3.49 M を $\aleph_0$-飽和モデル，$\phi(\bar{v})$ を $\mathrm{RM}(\phi) = \alpha$ であるような $L(M)$-論理式，さらに $\psi(\bar{v}, \bar{w})$ を L-論理式とする．このとき，集合

$$\{\bar{b} \in \mathfrak{M} : \mathrm{RM}(\psi(\bar{v}, \bar{b}) \wedge \phi(\bar{v})) = \alpha\}$$

は，M 上定義可能である．同様に，$A \subseteq M$ と $L(A)$-論理式 $\phi(\bar{v})$ に対して，

$$\{\bar{b} \in \mathfrak{M} : \mathrm{RM}(\psi(\bar{v}, \bar{b}) \wedge \phi(\bar{v})) = \alpha\}$$

は，A 上定義可能である．

証明 $\deg_M(\phi) = 1$ の場合を示せば十分である．$\mathrm{RM}(\phi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{c})) = \alpha$ であるような $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ を考える．$\phi(M) \cap \psi(\mathfrak{M}, \bar{c})$ の有限部分集合 $X_{\bar{c}}$ が存在して，任意の $\bar{b} \in \mathfrak{M}$ に対して，$X_{\bar{c}} \subset \psi(\mathfrak{M}, \bar{b})$ ならば $\mathrm{RM}(\phi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{b})) = \alpha$ である．もしそうでないとすると，各 $i < \alpha$ に対して

$$\bar{a}_i \in \phi(M) \cap \psi(\mathfrak{M}, \bar{c}) \text{ かつ } \mathrm{RM}(\phi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{b}_i)) < \alpha$$

であるような $\bar{a}_0, \bar{b}_0, \cdots, \bar{a}_n, \bar{b}_n, \cdots \in \mathfrak{M}$ が定義できることを示す．$\bar{a}_0$, $\bar{b}_0, \cdots, \bar{a}_n$, $\bar{b}_n$ まで定義したとする．

$$\mathrm{RM}\left(\phi(\bar{a}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{c}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \neg\psi(\bar{v}, \bar{b}_i)\right) = \alpha$$

なので，補題 3.48 より，

$$\bar{a}_{n+1} \in \left(\phi(M) \cap \psi(\mathfrak{M}, \bar{c})\right) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \psi(\mathfrak{M}, \bar{b}_i)$$

であるような $\bar{a}_{n+1}$ が存在する．仮定から，

$$\{\bar{a}_0, \cdots, \bar{a}_{n+1}\} \subset \psi(\mathfrak{M}, \bar{b}_{n+1}) \text{ かつ } \mathrm{RM}(\phi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{b}_{n+1})) < \alpha$$

であるような $\bar{b}_{n+1}$ が存在する．よって

$$\models \psi(\bar{a}_i, \bar{b}_j) \Longleftrightarrow i < j$$

が成り立つ．これは定理 3.43 に反する．

$$Y = \{X \subset \phi(M) : |X| < \omega \text{ かつ } X \subset \psi(\mathfrak{M}, \bar{b}) \Longrightarrow \mathrm{RM}(\phi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{b})) = \alpha\}$$

とおく．さらに各 $X \in Y$ に対して，L_M-論理式 $\theta_X(\bar{w})$ を

$$\theta(\bar{w}) := \bigwedge_{\bar{x}\in X} \psi(\bar{x}, \bar{w})$$

と定義する．上で議論したことから，

$$\mathrm{RM}(\phi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{b})) = \alpha \Longleftrightarrow \bigvee_{X\in Y} \theta_X(\bar{b})$$

である．よって $\mathrm{RM}(\phi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{w})) = \alpha$ は無限個の L_M-論理式の論理和と同値であると考えることができる．同様に $\mathrm{RM}(\phi(\bar{v}) \wedge \neg\psi(\bar{v}, \bar{w})) = \alpha$ も無限個の L_M-論理式の論理和と同値であることが分かる．

さて $\mathfrak{M}$ の飽和性から，有限集合 $Y_0 \subset Y$ が存在して

$$\models \bigvee_{X\in Y_0} \theta_X(\bar{w}) \Longleftrightarrow \models \bigvee_{X\in Y} \theta_X(\bar{w})$$

が成り立つ．左側の論理和は Y_0 が有限集合なので $L(M)$-論理式であり集合

$$\Delta = \{\bar{b} : \mathrm{RM}(\phi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{b})) = \alpha\}$$

を定義している．$A \subseteq M$ と $L(A)$-論理式 $\phi(\bar{v})$ に対し，$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/A)$ ならば補題 3.25 より，すべての $\bar{b} \in \Delta$ に対し

$$\mathrm{RM}(\phi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, \bar{b})) = \alpha \Longleftrightarrow \mathrm{RM}(\phi(\bar{v}) \wedge \psi(\bar{v}, \sigma(\bar{b}))) = \alpha$$

が成り立つ．すなわち $\sigma(\Delta) = \Delta$ である．よって定理 A.8 より，集合 Δ は A 上定義可能である．□

定義 3.50　$\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A \cup B)$ であるとき，A 上 $\bar{a}$ は B から**独立**であるといい，$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ と書く．

独立性の概念は以下に述べるような，いくつもの良い性質を持っている．

補題 3.51 (単調性)　$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ かつ $C \subseteq B$ ならば $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A C$ である．

証明　Morley 階数の定義から，$\mathrm{RM}(\bar{a}/A) \geq \mathrm{RM}(\bar{a}/A \cup C) \geq \mathrm{RM}(\bar{a}/A \cup B)$ である．よって，$\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A \cup B)$ ならば，$\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A \cup C)$ となる．□

補題 3.52 (推移性)　$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \bar{b}, \bar{c} \Longleftrightarrow \left(\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \bar{b}\ \text{かつ}\ \bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A,\bar{b}} \bar{c}\right)$

証明 Morley 階数の定義から，$\mathrm{RM}(\bar{a}/A,\bar{b},\bar{c}) \leq \mathrm{RM}(\bar{a}/A,\bar{b}) \leq \mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ である．したがって，

$$\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A,\bar{b},\bar{c}) \Longleftrightarrow$$
$$\Big(\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A,\bar{b}) \text{ かつ } \mathrm{RM}(\bar{a}/A,\bar{b}) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A,\bar{b},\bar{c})\Big)$$

□

補題 3.53 (有限基底性)

$$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B \Longleftrightarrow \Big(\text{有限なすべての } B_0 \subseteq B \text{ に対して } \bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B_0\Big)$$

証明 ($\Longrightarrow$) Morley 階数の定義から，任意の $B_0 \subseteq B$ に対して $\mathrm{RM}(\bar{a}/A) \leq \mathrm{RM}(\bar{a}/A \cup B_0) \leq \mathrm{RM}(\bar{a}/A \cup B)$ が成り立つので明らか．

($\Longleftarrow$) $\bar{a} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$ とする．このとき $\mathrm{RM}(\phi) \leq \mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ となるような論理式 $\phi \in \mathrm{tp}(\bar{a}/A \cup B)$ が存在する．論理式 ϕ が $L(A \cup B_0)$-論理式であるような B の有限部分集合を B_0 とすると，$\bar{a} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B_0$ である． □

独立性に関する性質の中で，一番重要であるのが次に証明する対称性である．

補題 3.54 (対称性) $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \bar{b} \Longrightarrow \bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A \bar{a}$

証明 $\mathrm{RM}(\bar{a}/A\bar{b}) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ を仮定して，$\mathrm{RM}(\bar{b}/A\bar{a}) = \mathrm{RM}(\bar{b}/A)$ であることを示す．$\alpha = \mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ かつ $\beta = \mathrm{RM}(\bar{b}/A)$ とおく．

まず A が $\aleph_0$-飽和モデル M である場合を考える．$\phi(\bar{v}) \in \mathrm{tp}(\bar{a}/M)$ を $\mathrm{RM}(\phi) = \alpha$ かつ $\deg_M(\phi) = 1$ であるような論理式とする．さらに $\psi(\bar{v}) \in \mathrm{tp}(\bar{b}/M)$ を $\mathrm{RM}(\psi) = \beta$ かつ $\deg_M(\psi) = 1$ であるような論理式とする．もし $\mathrm{RM}(\bar{b}/A\bar{a}) < \mathrm{RM}(\bar{a}/A)$ とすると，$\models \theta(\bar{a},\bar{b})$ かつ $\mathrm{RM}(\theta(\bar{a},\bar{w})) < \beta$ であるような論理式 $\theta(\bar{v},\bar{w})$ が存在する．

定理 3.49 より，集合 $\{\bar{x} : \mathrm{RM}(\psi(\bar{w}) \wedge \theta(\bar{x},\bar{w})) < \beta\}$ を定義する $L(M)$-論理式 $\chi(\bar{v})$ が存在する．仮定から $\mathrm{RM}(\bar{a}/M\bar{b}) = \alpha$ なので，

$$\mathrm{RM}(\phi(\bar{v}) \wedge \theta(\bar{v},\bar{b}) \wedge \chi(\bar{v})) = \alpha$$

である．補題 3.48 より，

$$\models \theta(\bar{a}',\bar{b}) \text{ かつ } \mathrm{RM}(\psi(\bar{w}) \wedge \theta(\bar{a}',\bar{w})) < \beta$$

となる $\bar{a}' \in M$ が存在する．しかしこれは $\mathrm{RM}(\bar{b}/M) = \beta$ であることに反する．

一般の場合は，A を含む $\aleph_0$-飽和モデル M を考える．$\mathrm{tp}(\bar{b}/A)$ の M 上への非分岐拡大が少なくとも 1 つ存在するから，$\bar{b}'$ をそのうちの 1 つの解とする．もちろん $\mathrm{RM}(\bar{b}'/M) = \beta$ である．$\mathrm{tp}(\bar{a}, \bar{b}/A) = \mathrm{tp}(\bar{c}, \bar{b}'/A)$ をみたす $\bar{c} \in \mathfrak{M}$ が存在する．タイプ $\mathrm{tp}(\bar{c}/A, \bar{b}')$ の $M \cup \{\bar{b}'\}$ への 1 つの非分岐拡大の解を $\bar{a}' \in \mathfrak{M}$ とする．そうすると，$\mathrm{RM}(\bar{a}'/M, \bar{b}') = \mathrm{RM}(\bar{a}'/M) = \alpha$ である．あとは，A が $\aleph_0$-飽和モデルであるときの結果を使えばよい．□

系 3.55　$\bar{a}, \bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A C \iff \left(\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A C \text{ かつ } \bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{A,\bar{a}} C\right)$.

証明　有限基底性から C を有限列 $\bar{c}$ だとしてよい．

$$\begin{aligned}\bar{a}, \bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A \bar{c} &\iff \bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A \bar{a}, \bar{b} \quad (\text{対称性})\\ &\iff \left(\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A \bar{a} \text{ かつ } \bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{A,\bar{a}} \bar{b}\right) \quad (\text{推移性})\\ &\iff \left(\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A \bar{c} \text{ かつ } \bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{A,\bar{a}} \bar{c}\right) \quad (\text{対称性})\end{aligned}$$

□

系 3.56　すべての $\bar{a}$ に対して，$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A \mathrm{acl}(A)$ である．

証明　$\bar{b} \in \mathrm{acl}(A)$ とすると，$\mathrm{RM}(\bar{b}/A, \bar{a}) = \mathrm{RM}(\bar{b}/A) = 0$ である．よって $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A \bar{a}$ である．対称性から $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A \bar{b}$ である．したがって $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A \mathrm{acl}(A)$ である．□

補題 3.57　T を強極小理論とし，$M \models T$ とする．$A \subset M$ と $\bar{a}, \bar{b} \in M$ に対し，

$$\mathrm{RM}(\bar{a}\bar{b}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A\bar{b}) + \mathrm{RM}(\bar{b}/A)$$

である．よって

$$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A \bar{b} \iff \mathrm{RM}(\bar{a}\bar{b}/A) = \mathrm{RM}(\bar{a}/A) + \mathrm{RM}(\bar{b}/A)$$

である．

証明　M が強極小構造なので，$\mathrm{RM}(\bar{a}/A) = \dim(\bar{a}/A)$ が成り立っていることに注意する．□

3.3.2 非可算範疇的な理論は ω-安定である

この小節では，次節の Morley の非可算範疇性定理を証明するのに必要な ω-安定理論の性質を紹介する．

定義 3.58 L を可算言語，T を完全な L-理論とする．このとき，濃度 κ のモデルで同型を除いたものの個数 (無限個ある場合は，その濃度) を $I(T,\kappa)$ で表す．$I(T,\kappa)=1$ のとき，T は κ-範疇的であるという．

定理 3.59 L を可算言語，T を L-理論とする．T は無限モデルしか持たないとする．L^* を，L に Skolem 関数をすべて付け加えた可算言語とする．T^* を T の L^* への拡張とする．任意の無限基数 κ に対して，$M \models T^*$, $|M|=\kappa$ かつ，$A \subseteq M$ ならば M は $S_n(A)$ に属するタイプのうち高々 $|A|+\aleph_0$ 個しか実現しないようなものが存在する．

証明 記述を簡明にするために $n=1$ として証明するが，一般性を失う訳ではない．L^* を L に Skolem 関数をすべて付け加えた言語，T^* を T の L^* への拡張とする．I を，順序型が $(\kappa,<)$ であるような順序一様集合とし，$M \models T$ を I の Skolem 閉包とする．L^* が可算言語なので $|M|=\kappa$ である．

$A \subseteq M$ とする．M が I の Skolem 閉包であるので，各 $a \in A$ に対して，項 t_a と I の元の有限列 $\bar{x}_a$ で $a=t_a(\bar{x}_a)$ となるものが存在する．

$$X=\{x \in I : a \text{ が } A \text{ を動くとき，} x \text{ はどれかの } \bar{x}_a \text{ に現れる }\}$$

とおく．$|X| \leq |A|+\aleph_0$ である．

I の元の有限列，$y_1<\cdots<y_n$ と $z_1<\cdots<z_n$ に対して，$\bar{y}$ と $\bar{z}$ が 集合 X に関して同じ位置にあるとき，すなわち各 $x \in X$ と各 $i=1,\cdots,n$ に対して，

$$\Big(y_i<x \Longleftrightarrow z_i<x\Big) \text{ かつ } \Big(y_i=x \Longleftrightarrow z_i=x\Big)$$

であるとき $\bar{y} \sim_X \bar{z}$ と書く．

主張： t を Skolem 項，$\bar{y} \sim_X \bar{z}$ とする．このとき $t(\bar{y})$ と $t(\bar{z})$ は $S_1^M(A)$ の同一タイプの解になっている．

$a_1,\cdots,a_m \in A$ とする．$\bar{y} \sim_X \bar{z}$ なので，I の性質から

$$M \models \phi(t(\bar{y}),a_1,\cdots,a_m) \Longleftrightarrow M \models \phi(t(\bar{y}),t_{a_1}(\bar{x}_{a_1}),\cdots,t_{a_m}(\bar{x}_{a_m}))$$

$$\iff M \models \phi(t(\bar{z}), t_{a_1}(\bar{x}_{a_1}), \cdots, t_{a_m}(\bar{x}_{a_m}))$$

$$\iff M \models \phi(t(\bar{z}), a_1, \cdots, a_m)$$

が成り立っている．したがって $t(\bar{y})$ と $t(\bar{z})$ は同じタイプの解になっている．

ゆえに $|I^n/\sim_X| \leq |A| + \aleph_0$ を示せば証明が終わる．各 $y \in I \backslash X$ に対して

$$C_y = \{x \in X : x < y\}$$

とおく．C_y は I の切断になっていることが分かる．このとき $\bar{y} \sim_X \bar{z}$ であることと，各 i について

$$\Big(y_i \in X \text{ ならば } y_i = z_i\Big) \text{ かつ } \Big(y_i \notin X \text{ ならば } z_i \notin X \text{ かつ } C_{y_i} = C_{z_i}\Big)$$

であることは同値である．I は整列されているので，$C_y = C_z$ であることと

$$\Big(C_y = C_z = \varnothing\Big) \text{ または } \Big(\inf\{i \in I : i > C_y\} = \inf\{i \in I : i > C_z\}\Big)$$

であることは同値である．切断 C_y は高々 $|X| + 1$ 個しかないので，$|I^n/\sim_X| \leq |A| + \aleph_0$ であり M は高々 $|A| + \aleph_0$ 個の A 上のタイプを実現する．□

系 3.60　L を可算言語，T を L-理論とする．T は無限モデルしか持たないとする．κ を非可算基数とする．T が κ-範疇的ならば T は ω-安定である．

証明　T が ω-安定でなければ T の可算モデル M が存在して，ある $A \subseteq M$ に対して $|S_n(A)| > \aleph_0$ である．M の初等拡大モデル N_0 で，濃度が κ かつ $S_n(A)$ に属する非可算個のタイプを実現するものが存在する．一方，上の定理から T のモデル N_1 で，濃度が κ かつ任意の可算部分集合 $B \subset N_1$ に対して N_1 は高々可算個の B 上のタイプしか実現しないものも存在する．これは T が κ-範疇的であることに反する．□

3.4　Morley の非可算範疇性定理と Baldwin-Lachlan の定理

この節では強極小集合の性質を用いて，Morley の非可算範疇性定理と Baldwin-Lachlan の定理を証明する．Morley の定理は 1960 年代に証明されたが，その後のモデル理論発展の方向付けをした重要な定理である．この節では，可算言語で記述された，無限モデルのみを持つ完全な理論 T だけを考えることにする．

定義 3.61 無限濃度 κ に対して，濃度 κ のモデルが同型を除いて 1 つだけしかないような完全理論を κ-範疇的理論と呼ぶ，また，すべての非可算濃度 κ に対して κ-範疇的であるような理論を，非可算範疇的理論と呼ぶ．

定理 3.62 (Morley の非可算範疇性定理) 理論 T は，ある非可算濃度 κ に対して κ-範疇的だとする．このとき，T はすべての非可算濃度 κ に対して κ-範疇的である．

定理 3.63 (Baldwin-Lachlan の定理) 理論 T は非可算範疇的だとする．このとき T が可算範疇的でなければ，T の可算モデルは同型を除いてちょうど $\aleph_0$ 個存在する．

これら 2 つの定理があてはまる典型的な場合がある．本書で何度も例として登場する代数的閉体の理論である．Steinitz の定理により，代数的閉体は素体上の超越次数によって構造が決まってしまう．したがって，標数が同じで，等しい非可算超越次数を持つ体は互に同型になる．また，濃度可算な代数的閉体は，有限な超越次数ごとに同型を除いて 1 つずつあるので，標数 p ($p \geq 0$) の代数的閉体の理論の可算モデルはちょうど $\aleph_0$ 個存在する．

補題 3.64 T を ω-安定理論，M を T のモデルとする．

(1) M 上の極小論理式 $\varphi(x, \bar{a})$ ($\bar{a} \in M$) が存在する．

(2) M が $\aleph_0$-飽和ならば，M 上の極小論理式 $\varphi(x, \bar{a})$ は強極小論理式である．

証明 (1) 背理法で示す．$L(M)$-論理式の集合 $\Sigma = \{\phi_\sigma(x, \bar{a}_\sigma) : \sigma \in 2^{<\omega}\}$ で次の性質を持つものを帰納的に定義する．

- $\sigma \subset \tau$ ならば $\phi_\tau \models \phi_\sigma$，すなわち $\forall x(\phi_\tau(x, \bar{a}_\tau) \longrightarrow \phi_\sigma(x, \bar{a}_\sigma))$,
- 各 $\sigma \in 2^{<\omega}$, $i = 0, 1$ に対して，$\phi_{\sigma,i} \models \neg\phi_{\sigma,1-i}$,
- 各 $\sigma \in 2^{<\omega}$ に対して $\phi_\sigma(M)$ は無限集合．

まず，$\phi_\varnothing$ として論理式 $x = x$ を考える．$\phi_\sigma(M)$ が無限集合であるとする．背理法の仮定から，ϕ_σ は極小論理式ではないので，$(\phi_\sigma \wedge \psi)(M)$ と $(\phi_\sigma \wedge \neg\psi)(M)$ がともに無限集合であるような $L(M)$-論理式 $\psi(x, \bar{b})$ が存在する．

$$\phi_{\sigma,0} = \phi_\sigma \wedge \psi,\ \phi_{\sigma,1} = \phi_\sigma \wedge \neg\psi$$

とおく．このようにして Σ を定義する．Σ に属す論理式に現れるパラメーター全体の集合を A とすると，A は可算集合である．Σ に属す論理式を樹形図状に並べたとき，各枝上にある論理式で生成されるタイプはすべて互いに異なるので $|S_1(A)| = 2^{\aleph_0}$ であることが分かる．これは T が ω-安定であることに反する．よって M 上の論理式 $\phi(x, \bar{a})$ で $\phi(M)$ が無限集合ならば $M \backslash \phi(M)$ は有限集合であるようなものが存在する．

(2) 背理法で示す．M 上の極小論理式 $\phi(x, \bar{a})$ が強極小でないとすると $M \prec N$ が存在して N で $\phi(x, \bar{a})$ は極小論理式でない．すなわち $L(N)$-論理式 $\psi(x, \bar{b})$ が存在して

$$\phi(N, \bar{a}) \cap \psi(N, \bar{b}), \quad \phi(N, \bar{a}) \backslash \psi(N, \bar{b})$$

はともに無限集合になっている．ここで，$\mathrm{tp}_N(\bar{b}/\bar{a})$ を考える．M は $\aleph_0$-飽和なので，$\mathrm{tp}_M(\bar{b}'/\bar{a}) = \mathrm{tp}_N(\bar{b}/\bar{a})$ となる $\bar{b}' \in M$ が存在する．このとき

$$\phi(M, \bar{a}) \cap \psi(M, \bar{b}'), \quad \phi(M, \bar{a}) \backslash \psi(M, \bar{b}')$$

の両方が無限集合となるので，$\phi(x, \bar{a})$ が極小論理式であることに反する． □

定義 3.65　T を理論とする．M, N を T の異なるモデルとし，$M \prec N$ とする．$L(M)$-論理式 $\phi(x)$ で，

$$|\phi(M)| \geq \aleph_0 \text{ かつ } \phi(M) = \phi(N)$$

となるものが存在するとき，(N, M) を **Vaught 対**と呼ぶ．このような対が存在しないとき，T は Vaught 対を持たないと言う．

定義 3.66　T を L-理論とする．$\kappa > \lambda \geq \aleph_0$ を非可算濃度とする．L-論理式 $\phi(x)$ と $M \models T$ が存在して，$|M| = \kappa$ かつ $|\phi(M)| = \lambda$ となるとき，T は (κ, λ)-モデルを持つという．

L を可算言語とし T を L-理論とする．コンパクト性定理を用いると，任意の無限濃度 κ に対して，

- $M \models T$ かつ $|M| = \kappa$,
- M のすべての $\varnothing$-定義可能な無限部分集合の濃度は κ,

であるような M が存在する．したがって T が (κ,λ)-モデル N も持てば，$M \not\cong N$ なので T は κ-範疇的ではない．

補題 3.67 $\kappa > \lambda \geq \aleph_0$ とする．理論 T が (κ,λ)-モデルを持てば，T は Vaught 対を持つ．

証明 N を (κ,λ)-モデルとする．すなわち，$N \models T$, $|N| = \kappa$ かつ，ある論理式 $\phi(\bar{v})$ に対して，$|X = \{\bar{a} \in N : N \models \phi(\bar{a})\}| = \lambda$ だとする．下方 Löwenheim-Skolem-Tarski 定理から，N の初等部分モデル M で $X \subseteq M$ かつ $|M| = \lambda$ であるような M が存在する．よって (N, M) は Vaught 対である． □

T が Vaught 対を持てば，2 つの可算モデルからなる Vaught 対を持つことを次に示す．そのために，論理式の**相対化**という概念を定義する．

定義 3.68 L を言語とし，U を L に属さない 1 変数述語記号とする．L-論理式 $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ に対して $\phi^U(x_1, \cdots, x_n)$ を帰納的に定義する．

(1) ϕ が原子論理式のときは，$U(x_1) \wedge \cdots \wedge U(x_n) \wedge \phi(x_1, \cdots, x_n)$ が $\phi^U(x_1, \cdots, x_n)$ のことである．

(2) $\phi = \neg\psi$ のときは，$\phi^U = \neg(\psi^U)$ とする．

(3) $\phi = \psi \vee \theta$ のときは，$\phi^U = \psi^U \vee \theta^U$ とする．

(4) $\psi = \psi \wedge \theta$ のときは，$\phi^U = \psi^U \wedge \theta^U$ とする．

(5) $\phi = \exists v\psi$ のときは，$\phi^U = \exists v(U(v) \wedge \phi)$ とする．

(6) $\phi = \forall v\psi$ のときは，$\phi^U = \forall v(U(v) \longrightarrow \phi)$ とする．

この記法を用いると，(N, M) が Vaught 対であるとき，(N, M) を L^*-構造と見なせば

$$M \models \phi(\bar{a}) \Longleftrightarrow (N, M) \models \phi^U(\bar{a})$$

である．

補題 3.69 (N, M) を T の Vaught 対とする．このとき T の Vaught 対 (N_0, M_0) で N_0 が可算モデルであるようなものが存在する．

証明 下方 Löwenheim-Skolem-Tarski 定理により，(N, M) の初等部分モデルになっている可算 L^*-構造 (N_0, M_0) が存在する．$M \prec N$ なので，任意の論理式

$\psi(v_1, \cdots, v_k)$ に対して，

$$(N, M) \models \forall \bar{v} \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{k} U(v_i) \wedge \psi(\bar{v}) \right) \longrightarrow \psi^U(\bar{v}) \right)$$

が成り立つ．$(N_0, M_0) \prec (N, M)$ なので，$M_0 \prec N_0$ である．

$\phi(\bar{v})$ を $L(M)$-論理式とし，$\phi(M)$ が無限集合で $\phi(M) = \phi(N)$ とする．このとき任意の自然数 k に対して

$$(N, M) \models \exists v_1 \cdots \exists v_k \left(\bigwedge_{i<j} v_i \neq v_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \phi(v_i) \right)$$

である．さらに，

$$(N, M) \models \exists x \neg U(x) \wedge \forall v \, (\phi(v) \longrightarrow U(v))$$

も成り立っている．$(N_0, M_0) \prec (N, M)$ なので (N_0, M_0) も T の Vaught 対である． □

補題 3.70　(N_0, M_0) を T の可算 Vaught 対とする．このとき T の可算モデル M, N で

- $(N_0, M_0) \prec (N, M)$ かつ M, N はともに均質
- 各自然数 n について，$\{p \in S_n(T) : M \models p\} = \{p \in S_n(T) : N \models p\}$

であるようなものが存在する．さらに $M \cong N$ となっている．

証明　**主張 1**：$\bar{a} \in M_0$ としタイプ $p \in S_n(\bar{a})$ は N_0 に解を持っているとする．このとき T の可算モデル M', N' が存在して，$(N_0, M_0) \prec (N', M')$ かつ p が M' で解を持つようにできる．

これはコンパクト性定理を用いて次のように示すことができる．L^*-論理式の集合 $\Gamma(\bar{v})$ を，

$$\Gamma(\bar{v}) = \{\phi^U(\bar{v}, \bar{a}) : \phi(\bar{v}, \bar{a}) \in p\} \cup \mathrm{Diag}_{L^*}(N_0, M_0)$$

とおく．$\phi_1, \cdots, \phi_m \in p$ とすると $N_0 \models \exists \bar{v} \bigwedge_i \phi_i(\bar{v}, \bar{a})$ である．よって $M_0 \models \exists \bar{v} \bigwedge_i \phi_i(\bar{v}, \bar{a})$ である．よって $(N_0, M_0) \models \exists \bar{v} \wedge \phi^U(\bar{v}, \bar{a})$ である．したがって Γ は無矛盾である．(N', M') を Γ の可算モデルとすると $(N_0, M_0) \prec (N', M')$ であり，p は M' で解を持つ．

この主張を ω 回繰り返すと，T の可算モデル N^*, M^* で，$(N_0, M_0) \prec (N^*, M^*)$ であって，任意の $\bar{a} \in M_0$ と任意のタイプ $p \in S_n(\bar{a})$ に対して p が N_0 で解を持てば，p は M^* で解を持つようにできる．主張 1 の証明と同じようにして，次の主張も証明できる．

主張 2： $\bar{b} \in N_0$ とし $p \in S_n(\bar{b})$ とする．このとき $(N_0, M_0) \prec (N', M')$ で N' が p の解を持つようにできる．

主張 1, 2 を繰り返して，以下の性質を持つような可算モデルの初等拡大列

$$(N_0, M_0) \prec \cdots \prec (N_i, M_i) \prec \cdots$$

を定義する．

(i) $p \in S_n(T)$ が N_{3i} に解を持てば，p は N_{3i+1} に解を持つ．

(ii) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $c \in M_{3i+1}$ とする．$\mathrm{tp}^{M_{3i+1}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{M_{3i+1}}(\bar{b})$ ならば $d \in M_{3i+2}$ で $\mathrm{tp}^{M_{3i+2}}(\bar{a}, c) = \mathrm{tp}^{M_{3i+2}}(\bar{b}, d)$ となるものが存在する．

(iii) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $c \in N_{3i+2}$ とする．$\mathrm{tp}^{N_{3i+2}}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{N_{3i+2}}(\bar{b})$ ならば $d \in N_{3i+3}$ で $\mathrm{tp}^{N_{3i+3}}(\bar{a}, c) = \mathrm{tp}^{N_{3i+3}}(\bar{b}, d)$ となるものが存在する．

$(N, M) = \bigcup_{i<\omega} (N_i, M_i)$ とおく．(N, M) は可算 Vaught 対である．M, N が求めるものである．$M \cong N$ であることは，往復論法によって証明することができる． □

定理 3.71 (Vaught) $\kappa > \lambda \geq \aleph_0$ とする．T が (κ, λ)-モデルを持てば，T は $(\aleph_1, \aleph_0)$-モデルを持つ．

証明 T が (κ, λ)-モデルを持つと仮定する．T の均質な可算モデル M, N が存在し，M に解を持つタイプの集合と N に解を持つタイプの集合は等しく (N, M) が Vaught 対になっているとする．$\phi(\bar{v})$ を $L(M)$-論理式とし $\phi(M)$ は無限集合で $\phi(M) = \phi(N)$ とする．モデル N と同型なモデル N_α たちからなる初等拡大列 $(N_\alpha : \alpha < \omega_1)$ で $(N_{\alpha+1}, N_\alpha) \cong (N, M)$ であるようなものを帰納的に定義することができる．特に $\phi(N_{\alpha+1}) = \phi(N_\alpha)$ であるようにすることができる．つまり ϕ の解は増えていない．$N^* = \bigcup_{\alpha<\omega_1} N_\alpha$ とおけば，N^* が $(\aleph_1, \aleph_0)$ モデルである． □

補題 3.72 T を ω-安定理論とし，M を T の非可算モデルとする．このとき M の初等拡大 N で次の性質を持つものが存在する．すなわち，$L(M)$-論理式からなる任意の可算集合 $\Gamma(\bar{v})$ に対して，$\Gamma(\bar{v})$ が N で解を持てば $\Gamma(\bar{v})$ は M で解を持つ．

証明　$L(M)$-論理式 $\phi(v)$ で，次の 2 つの性質を持つものが存在する．

- $|\phi(M)| \geq \aleph_1$,
- 任意の $L(M)$-論理式 $\psi(M)$ に対して，$\phi(v) \wedge \psi(v)$ または $\phi(v) \wedge \neg\psi(v)$ は M の中に高々可算個の解しか持たない．

もしこのような論理式が存在しないならば，M の中に非可算個の解を持つ任意の $L(M)$-論理式 $\phi(v)$ に対して，$\phi(v) \wedge \psi(v)$ と $\phi(v) \wedge \neg\psi(v)$ の両方が M の中に非可算個の解を持つような $L(M)$-論理式 $\psi(v)$ が存在する．このことを利用して論理式の 2 分木 $(\phi_\sigma : \sigma \in 2^{<\omega})$ を次のように定義する．

(i) $\phi_\varnothing := v = v$,

(ii) ϕ_σ は M に非可算個の解を持つ，

(iii) $\phi_{\sigma,0}(M)$, $\phi_{\sigma,1}(M)$ は共に $\phi_\sigma(M)$ の非可算部分集合で $\phi_{\sigma,0}(M)$ と $\phi_{\sigma,1}(M)$ は共通部分を持たない．

この 2 分木に現れるパラメーター全体の集合を A とすると，A は M の可算部分集合である．$|S_1^M(A)| = 2^{\aleph_0}$ なので，定理 3.43 より T が ω-安定であることに反する．

$\phi(v)$ を最初に述べた性質を持つ論理式とする．

$$p(v) = \left\{ \psi(v) : \begin{array}{l} \psi(v) \text{ は } L(M)\text{-論理式で，} \\ \phi(v) \wedge \psi(v) \text{ は } M \text{ に非可算個の解を持つ} \end{array} \right\}$$

とおく．$p(v)$ は M 上の完全タイプである．M' を M の初等拡大とし $c \in M'$ が $p(v)$ の解になっているとする．T が ω-安定理論なので $M \cup \{c\}$ 上の素モデル N で，$N \prec M'$ かつ，任意の $\bar{a} \in N$ はそれぞれ $M \cup \{c\}$ 上の孤立タイプの解になっているものが存在する．

$\Gamma(\bar{w})$ を $L(M)$-論理式の可算集合とし，$\bar{b} \in N$ をその解とする．$\theta(\bar{w}, v)$ を $\theta(\bar{w}, c) \vdash \mathrm{tp}^N(\bar{b}/M \cup \{c\})$ であるような $L(M)$-論理式とする．$\exists \bar{w}\theta(\bar{w}, v) \in p(v)$ であり，任意の $\gamma(\bar{w}) \in \Gamma(\bar{w})$ に対して，$\forall \bar{w}(\theta(\bar{w}, v) \longrightarrow \gamma(\bar{w})) \in p(v)$ である．よって

$$\Delta(v) = \{\exists \bar{w}\theta(\bar{w}, v)\} \cup \{\forall \bar{w}(\theta(\bar{w}, v) \longrightarrow \gamma(\bar{w})) : \gamma(\bar{w}) \in \Gamma(\bar{w})\}$$

とおくと，$\Delta(v)$ は $p(v)$ の可算部分集合であり，c' が $\Delta(v)$ の解ならば $\exists \bar{w}\, \theta(\bar{w}, c')$ が成り立ち，$\theta(\bar{b}', c')$ であれば $\bar{b}'$ は $\Gamma(\bar{w})$ の解になっている．

$\Delta(v) = \{\delta_0(v), \delta_1(v), \cdots\}$ とする．$\phi(v)$ の取り方から $|\phi(M)| \geq \aleph_1$ であり，任意の自然数 n に対して $\phi(v) \wedge \neg\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \delta_i(v)\right)$ は M の中に高々可算個の解しか持たない．よって，

$$|\{x \in M : x \text{ は} \phi(v) \text{ と} \Delta(v) \text{ の解 }\}| \geq \aleph_1$$

である．$c' \in M$ を $\Delta(v)$ の解とし，$\bar{b}' \in M$ を $M \models \theta(\bar{b}', c')$ であるように選ぶ．この $\bar{b}'$ が M の中の $\Gamma(\bar{w})$ の解になっている． □

定理 3.73 T を ω-安定理論とする．T が $(\aleph_1, \aleph_0)$-モデルを持てば，任意の $\kappa > \aleph_1$ に対して，T は $(\kappa, \aleph_0)$-モデルを持つ．

証明 M を T の $(\aleph_1, \aleph_0)$-モデルとする．$\phi(v)$ を論理式とし，$|\phi(M)| = \aleph_0$ とする．前の補題のような性質を持つ M の初等拡大 N を考える．

$$\Gamma(v) = \{\phi(v)\} \cup \{v \neq m : m \in M \text{ かつ } M \models \phi(m)\}$$

とおくと，$\Gamma(v)$ は論理式の可算集合であって M に解を持たない．したがって N でも解を持たない．したがって，$\phi(N) = \phi(M)$ である．

この操作を繰り返して，$\phi(v)$ の解を増やさない T のモデルの初等拡大列 $(M_\alpha : \alpha < \kappa)$ を定義することができる．$N = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ とおくと，N は T の $(\kappa, \aleph_0)$-モデルである． □

補題 3.74 L を可算言語，T を L-理論とし無限モデルしか持たないとする．非可算基数 $\kappa \geq \aleph_1$ に対して，T が κ-範疇的ならば T は Vaught 対を持たない．

証明 T が κ-範疇的なので系 3.60 より T は ω-安定である．もし T が Vaught 対を持てば，定理 3.71 の証明から T は $(\aleph_1, \aleph_0)$-モデルを持つことが分かる．よって定理 3.73 より T は $(\kappa, \aleph_0)$-モデルを持つ．ところが T のモデル N で，$|N| = \kappa$ かつ N のすべての定義可能部分集合の濃度が κ であるようなものが存在する．これは T が κ-範疇的であることに反する． □

補題 3.20 や系 3.21 で確認したように，強極小集合の定義可能部分集合に関しては,「有限集合」であるとか「無限集合」であるといったことが論理式で表現できた．同様のことが Vaught 対を持たない理論のモデルでも成り立っている．

補題 3.75　T を Vaught 対を持たない理論とする．M を T のモデルとし，$\phi(x, m_1, \cdots, m_l)$ を M 上の論理式で $|\phi(M, \bar{m})| \geq \aleph_0$ とする．このとき $\phi(x, y_1, \cdots, y_l)$ だけに依存する正整数 n が存在して，任意の $\bar{a} \in M$ に対して

$$|\phi(M, \bar{a})| > n \text{ ならば } |\phi(M, \bar{a})| \geq \aleph_0$$

が成り立つ．

証明　背理法で示す．結論が成り立たないとすると，各正整数 n に対して $\bar{a}_n \in M$ が存在して，$\phi(M, \bar{a}_n)$ は少なくとも n より多くの元を持つ有限集合である．T の言語を L とし，L に 1 変数述語記号 U と定数記号 $\bar{c}$ を付け加えた言語 L^* を考える．$\Gamma(\bar{c})$ を，以下の性質を持つ L^*-論理式の集合とする．

- $\Gamma(\bar{c}) \supset T$.
- U は初等部分モデルである．すなわち，任意の L-論理式 $\psi(v_1, \cdots, v_k)$ に対して，

$$\forall \bar{v}\left(\left(\bigwedge_{i=1}^{k} U(v_i) \wedge \psi(\bar{v})\right) \longrightarrow \psi^U(\bar{v})\right)$$

が $\Gamma(\bar{c})$ に入っている．

- $\bigwedge_{i=1}^{l} U(c_i)$.
- $\phi(x, \bar{c})$ を満たす x が無限個存在する．
- $\forall x(\phi(x, \bar{c}) \longrightarrow U(x))$.

$\Gamma(\bar{c})$ が無矛盾であることを示す．そのために M の初等拡大 N を考える．$\phi(M, \bar{a}_n)$ は有限集合なので $\phi(M, \bar{a}_n) = \phi(N, \bar{a}_n)$ である．Δ を $\Gamma(\bar{c})$ の有限集合とする．n を十分大きくとれば $\bar{a}_n$ は Δ の解になっている．したがってコンパクト性定理から $\Gamma(\bar{c})$ は無矛盾である．

よって $M' \prec N'$ であるような T のモデル M', N' が存在して，さらにある $\bar{a} \in M'$ に対して $\phi(M', \bar{a})$ は無限集合で $\phi(M', \bar{a}) = \phi(N', \bar{a})$ となっている．これは T が Vaught 対を持たないという仮定に反する．□

系 3.76　T は Vaught 対を持たない理論とする．このとき任意の極小論理式は強極小論理式である．

証明　$M \models T$ 上の極小論理式 $\phi(x, \bar{a})$ を考える．ϕ が強極小でないとして矛盾を導く．$M \prec N$ とし

$$\phi(N, \bar{a}) \cap \psi(N, \bar{b}) \text{ と } \phi(N, \bar{a}) \backslash \psi(N, \bar{b})$$

がともに無限集合となるような N 上の論理式 $\psi(x, \bar{b})$ が存在する．上の補題から，ある正整数 n が存在して，M の任意の初等拡大 N' と $\bar{b}' \in N'$ に対して

$$|\phi(N', \bar{a}) \cap \psi(N', \bar{b}')| \geq \aleph_0 \text{ かつ } |\phi(N', \bar{a}) \backslash \psi(N', \bar{b}')| \geq \aleph_0$$

ということと，

$$|\phi(N', \bar{a}) \cap \psi(N', \bar{b}')| > n \text{ かつ } |\phi(N', \bar{a}) \backslash \psi(N', \bar{b}')| > n$$

が同値になっている．しかし，ϕ は M 上の極小論理式なので

$$M \models \forall \bar{y} \Big(|\phi(M, \bar{a}) \cap \psi(M, \bar{y})| \leq n \vee |\phi(M, \bar{a}) \backslash \psi(M, \bar{y})| \leq n \Big)$$

である．よって，

$$N \models \Big(|\phi(N, \bar{a}) \cap \psi(N, \bar{b}')| \leq n \Big) \vee \Big(|\phi(M, \bar{a}) \backslash \psi(N, \bar{b}')| \leq n \Big)$$

となって矛盾する．□

系 3.77　T を Vaught 対を持たない ω-安定理論とする．このとき T の任意のモデル M 上に強極小論理式が存在する．特に，T の素モデル上にも強極小論理式が存在する．

補題 3.78　T を，Vaught 対を持たない L-理論とする．$M \models T$ とし，$X \subseteq M$ を定義可能無限部分集合とする．このとき，M とは異なる M の初等部分モデルで X を部分集合として含むものは存在しない．特に T が ω-安定ならば，M は X 上の素モデルである．

証明　$\phi(x)$ を L-論理式とし，$X = \{m : M \models \phi(m)\}$ とする．N を M の初等真部分モデルとする．もし $X \subseteq N$ ならば，

$$X = \phi(M) = \phi(N)$$

となるので，N, M が Vaught 対になってしまう．よって $X \not\subseteq N$ である．

T が ω-安定ならば，$X \subseteq N \preceq M$ となる X 上の素モデル N が存在する．よって $N = M$ でなければならないので M は X 上の素モデルである． □

定理 3.79　L を可算言語とする．T を完全な L-理論で，無限モデルしか持たないとする．κ を非可算濃度とする．このとき，

$$I(T,\kappa) = 1 \Longleftrightarrow T \text{ は Vaught 対を持たない } \omega\text{-安定理論}$$

である．したがって，ある非可算濃度 κ に対して $I(T,\kappa) = 1$ ならば，すべての非可算濃度 λ に対して $I(T,\lambda) = 1$ である．

証明　($\Longrightarrow$)　$I(T,\kappa) = 1$ ならば，系 3.60 と 補題 3.74 より T は ω-安定であり，Vaught 対を持たない．

($\Longleftarrow$)　T は ω-安定なので素モデル M_0 を持つ．また系 3.77 より M_0 上の強極小論理式 $\phi(v,\bar{a})$ が存在する．

M, N を T のモデルで，$|M| = |N| = \kappa \geq \aleph_1$ だとする．M_0 は素モデルだから，M, N を M_0 の初等拡大と考える．まず

$$\dim(\phi(M)) = \dim(\phi(N)) = \kappa$$

であることに注意する．定理 3.22 より，$\phi(M)$ から $\phi(N)$ の上への 1 対 1 な初等的写像 f が存在する．上の補題 3.78 より，M は $\phi(M)$ 上の素モデルである．よって f を $f' : M \longrightarrow N$ に，初等的という性質を保存したまま拡張することができる．再び補題 3.78 より N は $\phi(N)$ 上の素モデルでなければならないから，f' は M と N の間の同型写像になっている． □

系 3.23 と同じように考えれば，次の命題が証明できる．

命題 3.80　T が非可算範疇的ならば，$I(T,\aleph_0) \leq \aleph_0$ である．

補題 3.81　T を ω-安定な L-理論とする．$\phi(v)$ を強極小な L-論理式とする．$M \models T$ かつ $\dim(\phi(M)) = n < \aleph_0$ ならば，任意の $m \geq n$ に対して T のモデル N で $\dim(\phi(N)) = m$ となるものが存在する．

証明　M の初等拡大 M^* で，T の $\aleph_0$-飽和モデルになっているものを考える．$\dim(\phi(M^*)) \geq \aleph_0$ である．$a_1, \cdots, a_m \in \phi(M^*)$ を独立な元とする．$\bar{a}$ 上の素モデ

ル $N \prec M^*$ で，任意の $\bar{b} \in N$ はそれぞれ $\bar{a}$ 上の孤立タイプの解になっているものが存在する．

$\phi(N) = \mathrm{acl}(\bar{a})$ である．もしそうでないとして $b \in \phi(N) \backslash \mathrm{acl}(\bar{a})$ をとる．$\theta(v, \bar{a}) \models \mathrm{tp}^N(b/\bar{a})$ であるような論理式 $\theta(v, \bar{a})$ を考える．$b \notin \mathrm{acl}(\bar{a})$ なので $\phi(N) \backslash \theta(N, \bar{a})$ は有限集合である．$\mathrm{acl}(\bar{a})$ は無限集合なので，

$$\models \phi(c) \wedge \theta(c, \bar{a})$$

であるような $c \in \mathrm{acl}(\bar{a})$ が存在する．この c については $\mathrm{tp}^N(c/\bar{a}) = \mathrm{tp}^N(b/\bar{a})$ が成り立つ．しかしこれは $b \notin \mathrm{acl}(\bar{a})$ に反する．したがって $\phi(N) = \mathrm{acl}(\bar{a})$ であり $\dim(\phi(N)) = m$ となる． □

この補題の系として，Baldwin-Lachlan の定理 3.63 が得られる．

3.5　タイプの標準基底

1 章の最後の節で仮想元という考え方を導入した．そこでは，論理式すなわち定義可能集合に対する標準仮想パラメーターという概念が主であった．ここでは，論理式の集合であるタイプに対して同様の働きをするものについて考える．そのためにまず「標準基底」という概念を定義する．しばらく万有モデル $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ で議論する．仮想元の定義を考えれば，$\mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ と $\mathrm{Aut}(\mathfrak{M}^{\mathrm{eq}})$ を自然に同一視できることに注意する．

定義 3.82　$X \subseteq \mathfrak{M}^n$ を定義可能集合とする．任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ に対して，$\sigma(a) = a$ $(a \in A)$ と $\sigma(X) = X$ が同値となるような $A \subset \mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ を X の標準基底という．A は X の標準仮想パラメーターそのものである．また，$p \in S_n(\mathfrak{M})$ に対しては，$\sigma p = p$ と $\sigma(a) = a$ $(a \in A)$ が同値となるときに $A \subset \mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ を p の 1 つの標準基底という．

補題 3.83　$X \subseteq \mathfrak{M}$ を定義可能集合とする．X は標準基底を持つ．とくに X が A 上定義可能なときは，$\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$ の中に標準基底が存在する．

証明　1 章 7 節参照のこと． □

このように定義可能集合に対しては，標準基底が常に存在する．次に完全タイプに対する標準基底について考える．

補題 3.84　A を完全タイプ $p \in S_n(\mathfrak{M})$ の 1 つの標準基底とする．このとき任意の $B \subset \mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ に対して，$\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B)$ となることと B が p の標準基底であることは同値である．

証明　$C \subset \mathfrak{M}$ かつ $|C| < |\mathfrak{M}|$ とする．このとき

$$\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(C) = \{x \in \mathfrak{M}^{\mathrm{eq}} : \text{ 各 } \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/C) \text{ に対して } \sigma(x) = x\}$$

が成り立つことに注意する．

B を p の標準基底とする．任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}/B)$ に対して $\sigma p = p$ である．A も p の標準基底なので σ は A の各点を固定する．よって $A \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B)$ である．同様に $B \subseteq \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$ であることも分かる．よって $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B)$ である．

逆に，$\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(B)$ とする．任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ に対して，

$$\sigma(a) = a \ (a \in A) \Longleftrightarrow \sigma(b) = b \ (b \in B)$$

である．仮定から A は p の標準基底なので B も p の標準基底である．　□

定義 3.85　A を p の標準基底の 1 つとする．$\mathrm{cb}(p) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$ と定義する．

ω-安定理論における標準基底の存在について解説する．

補題 3.86　T を ω-安定理論とする．任意の $p \in S_n(\mathfrak{M})$ に対して p の標準基底が $\mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ に存在する．

証明　定理 3.43 より，p は定義可能である．よって任意の論理式 $\phi(\bar{v}, \bar{w})$ に対して，$X_\phi = \{\bar{a} : \phi(\bar{v}, \bar{a}) \in p(\bar{x})\}$ は定義可能である．$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ に対して，

$$\sigma p = p \Longleftrightarrow \sigma(X_\phi) = X_\phi \ (\text{集合として})$$

である．$\alpha_\phi \in \mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ を X_ϕ の標準基底とし，$A = \{\alpha_\phi : \phi \text{ は } L\text{-論理式 }\}$ とおく．A が p の 1 つの標準基底である．　□

局所モジュラーな強極小集合を，さらに別の観点から特徴付けることを試みる．D を強極小集合とし，D^2 を平面と考える．$C \subset D^2$ を定義可能部分集合とする．定義 3.1 (3) の意味で C が強極小集合であるとき，C を平面曲線と考えることにする．平面曲線は，直観的に「1 次元」の対象である．パラメーターを変えるごとに平面曲線

を定義するような論理式 $\varphi_{\bar{a}} = \varphi(x, y, \bar{a})$ が与えられたとする．$\bar{a}$ をいろいろ変えて平面曲線族を考えることができる．この平面曲線族にある種の「次元」を考えることができる．この次元を用いて，強極小集合の特徴付けをしようというのが目標である．

定義 3.87 $D \subseteq \mathfrak{M}$ を強極小集合とする．任意の $p \in S_2(D)$ に対して，p の標準基底の階数が高々 1 であるとき，D は**線形である**という．

定理 3.88 D を飽和な強極小集合とする．次の 3 つの条件は同値である．

(1) D はモジュラーである．

(2) D は線形である．

(3) 任意の $b \in D \backslash \mathrm{acl}(\varnothing)$ に対して D_b はモジュラーである．

証明 ((1) $\Longrightarrow$ (2)) $p \in S_2(D)$ を強極小タイプ，すなわち $\mathrm{RM}(p) = \deg_M(p) = 1$ とし，$\phi(v_1, v_2, \bar{a}) \in p$ を強極小論理式, すなわち $\mathrm{RM}(\phi) = \deg_M(\phi) = 1$ とする．$(b_1, b_2) \models p$ とし，$X = \mathrm{acl}(\bar{a}) \cap \mathrm{acl}(b_1, b_2)$ とおく．D はモジュラーなので，

$$\dim(X) = \dim(\bar{a}) + \dim(b_1, b_2) - \dim(\bar{a}, b_1, b_2) \qquad (*)$$

である．ところで，$\dim(\bar{a}, b_1, b_2) = \dim(\bar{a}) + 1$ かつ，$1 \leq \dim(b_1, b_2) \leq 2$ なので，$\dim(X) \leq 1$ である．一方 $(*)$ より，

$$\begin{aligned} \dim(b_1, b_2/\bar{a}) &= \dim(b_1, b_2, \bar{a}) - \dim(\bar{a}) \\ &= \dim(b_1, b_2) - \dim(X) \\ &= \dim(b_1, b_2/X) \end{aligned}$$

である．したがって $\dim(b_1, b_2/X) = 1$ である．c を p の標準基底すると $c \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(X)$ なので，$\mathrm{RM}(c) \leq 1$ である．したがって D は線形である．

((2) $\Longrightarrow$ (3)) $b \in D \backslash \mathrm{acl}(\varnothing)$ とする．B を次元が有限な閉集合とする．$a_1 \in \mathrm{acl}(a_2, B, b)$ とすると，$a_1 \in \mathrm{acl}(a_2, d, b)$ となるような $d \in \mathrm{acl}(B, b)$ が存在することを示せばよい．

$a_1 \notin \mathrm{acl}(B, b)$, $a_2 \notin \mathrm{acl}(B, b)$，さらに $a_1 \notin \mathrm{acl}(a_2, b)$ が成り立っているとしてよい (そうでなければ，すでに証明は終わっている)．よって $\dim(a_1, a_2/b) = 2$ かつ $\dim(a_1, a_2/Bb) = 1$ である．

c を $\mathrm{tp}(a_1, a_2/\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B, b))$ の 1 つの標準基底とする．$c \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B, b)$ である．$\mathrm{RM}(a_1, a_2/c) = 1$ である．$\mathrm{RM}(a_1, a_2/c) < \mathrm{RM}(a_1, a_2)$ なので，$\mathrm{RM}(c/a_1, a_2) < \mathrm{RM}(c)$ である．D は線形なので $\mathrm{RM}(c) = 1$ である．よって $c \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(a_1, a_2)$ である．

$\mathrm{RM}(a_1, a_2/b) = 2$ かつ $\mathrm{RM}(a_1, a_2/c) = 1$ だったので，$c \notin \mathrm{acl}(b)$ である．したがって，$b \notin \mathrm{acl}(\varnothing)$ だから $b \notin \mathrm{acl}(c)$ である．よって $\mathrm{tp}(a_1/c) = \mathrm{tp}(b/c)$ であり D が飽和的なので $\mathrm{tp}(a_1, a_2/c) = \mathrm{tp}(b, d/c)$ となるような $d \in D$ が存在する．よって

$$d \in \mathrm{acl}(b, c) \subset \Big(\mathrm{acl}(a_1, a_2, b) \cap \mathrm{acl}(Bb)\Big)$$

かつ $d \notin \mathrm{acl}(b)$ である．もし $d \in \mathrm{acl}(a_2, b)$ ならば，$d \notin \mathrm{acl}(b)$ だから $a_2 \in \mathrm{acl}(d, b) \subseteq \mathrm{acl}(B, b)$ となって矛盾する．よって $d \notin \mathrm{acl}(a_2, b)$ である．したがって $d \in \mathrm{acl}(a_1, a_2, b) \backslash \mathrm{acl}(a_2, b)$ より $a_1 \in \mathrm{acl}(a_2, b, d)$ が得られる．

((3) $\Longrightarrow$ (1)) は演習問題とする．□

定義 3.89　T を ω-安定理論，$\mathfrak{M}$ を万有モデルとする．どんな A, $B \subseteq \mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ に対しても $A = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ かつ $B = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$ ならば $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A \cap B} B$ であるとき，T を 1-基底的理論と呼ぶ．

補題 3.90　T を ω-安定理論とする．次の 2 つの性質は同値である．

(1) T は 1-基底的である．

(2) 任意の $\bar{a} \in \mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ と $B \subseteq \mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ に対して，$\mathrm{cb}(\mathrm{tp}(\bar{a}/B)) \subseteq \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\bar{a})$ である．

証明　((1) $\Longrightarrow$ (2))　$A = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\bar{a})$ とおく．系 3.56 より $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$ である．また T が 1-基底的なので $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A \cap \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)} \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$ である．よって $\mathrm{cb}(\bar{a}/B) \subseteq A = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\bar{a})$ である．

((2) $\Longrightarrow$ (1))　$A = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A)$ かつ $B = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$ とする．任意の $\bar{a} \in A$ に対して，$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A \cap B} B$ であることを示す．系 3.56 より $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$ なので $\mathrm{cb}(\bar{a}/B) \subseteq \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B) = B$ である．仮定から $\mathrm{cb}(\bar{a}/B) \subseteq \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\bar{a}) = A$ である．よって $\mathrm{cb}(\bar{a}/B) \subseteq A \cap B$ なので $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A \cap B} B$ である．□

定理 3.91　T を強極小理論，$\mathfrak{M}$ を万有モデルとする．このとき

$$T \text{ は 1-基底的} \Longleftrightarrow \mathfrak{M} \text{ は局所モジュラー}$$

である．

証明　まず次の条件の下で，$\mathfrak{M}$ が 1-基底的であることと $\mathfrak{M}$ がモジュラーであることが同値なことを証明する．

任意の $\alpha \in \mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ に対して，$\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\alpha) = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\bar{d})$ となる $\bar{d} \in \mathfrak{M}$ が存在する．　(*)

$\mathfrak{M}$ は 1-基底的であるとする．$A, B \subseteq \mathfrak{M}$, $A = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A), B = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$ とする．このとき $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A) \cap \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)} B$ である．上の性質 (*) より $\bar{d} \in \mathrm{acl}(A) \cap \mathrm{acl}(B)$ で $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{d}} B$ となるものが存在する．よって $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A \cap B} B$ である．すなわち $\dim(A) + \dim(B) = \dim(A \cup B) + \dim(A \cap B)$ が成り立ち $\mathfrak{M}$ はモジュラーである．

逆に $\mathfrak{M}$ をモジュラーとする．$A, B \subseteq \mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ は $\mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ の中で代数的に閉じているとする．再び (*) より，$A_0, B_0 \subseteq \mathfrak{M}$ で $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(A_0) = A$ かつ $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B_0) = B$ となっているものが存在する．モジュラー性より $A_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{acl}(A_0) \cap \mathrm{acl}(B_0)} B_0$ である．よって系 3.56 より $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A \cap B} B$ である．

次に「1-基底的である」という性質は，組合せ幾何を局所化しても不変であることを示す．すなわち $X \subset \mathfrak{M}$ とすると

$$\mathfrak{M} \text{ は 1-基底的} \Longleftrightarrow \mathfrak{M}_X \text{ は 1-基底的}$$

であることを証明する．

$\mathfrak{M}$ が 1-基底的ならば，$A, B \subseteq \mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ に対して

$$\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(AX) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(AX) \cap \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(BX)} \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(BX)$$

である．したがって $\mathfrak{M}_X$ も 1-基底的である．

逆に $\mathfrak{M}_X$ が 1-基底的であるとする．$B \subseteq \mathfrak{M}, \bar{a} \in \mathfrak{M}$ をとる．$\mathrm{cb}(\mathrm{tp}(\bar{a}/B)) \subseteq \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\bar{a})$ を示す．$\mathrm{tp}(\bar{a}/B)$ は B のある有限部分集合 B_0 上非分岐的なので，B 自身が有限集合として一般性を失わない．同様に $\bar{a}, B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\varnothing} X$ としても一般性は失われない．もしこうなっていなければ，$\mathrm{tp}(\bar{a}, B/\varnothing)$ の X 上への非分岐拡大の解として $\bar{a}', B'$ をとり，それぞれ $\bar{a}, B$ と置き換えればよい．

さて $\bar{a}, B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|} X$ とすると，推移性から $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B X$ である．$\bar{c}$ を $\mathrm{tp}(\bar{a}/B, X)$ の 1 つの標準基底とすると，$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_B X$ より $\bar{c} \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(B)$ である．$\mathfrak{M}_X$ が 1-基底的なので $\bar{c} \in$

$\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\bar{a}, X)$ である．一方，$\bar{a}$, $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\varnothing} X$ だから $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\bar{a}} X$ である．よって $\bar{c} \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\bar{a})$ となる．

さて最後に仮定 (*) の妥当性を論ずる．$\mathfrak{M}$ が局所モジュラーならば $\mathfrak{M}_d$ がモジュラーとなるような $d \in \mathfrak{M}$ が存在する．$X \subset \mathfrak{M}$ を無限集合とすると $\mathfrak{M}_{X,d}$ は (*) を満たす．よって $\mathfrak{M}_{X,d}$ は 1-基底的であることになり $\mathfrak{M}$ も 1-基底的である．逆に $\mathfrak{M}$ が 1-基底的で $X \subset \mathfrak{M}$ が無限集合ならば $\mathfrak{M}_X$ は (*) を満たす．よって $\mathfrak{M}_X$ はモジュラーであり $\mathfrak{M}$ は局所モジュラーである． □

3.6　ω-安定群と Cherlin の定理

群をモデル理論的見地から眺めてみよう．G を群とし，$\mathrm{Th}(G)$ を考える．$\mathrm{Th}(G)$ が ω-安定であるような群の性質は詳しく調べられている．ここでは，それらのうち基本的なものを紹介する．

まず，ω-安定群を正確に定義しよう．

定義 3.92 (ω-**安定群**)　2 項演算 $\cdot$ と定数 1 を含む構造 $(G, \cdot, 1, \ldots)$ を考える．$(G, \cdot, 1)$ が群であり，構造 $(G, \cdot, 1, \ldots)$ の理論が ω-安定であるとき，構造 $(G, \cdot, 1, \ldots)$ を単に ω-安定群と呼ぶ．また，構造 構造 $(G, \cdot, 1, \ldots)$ が ω-安定で，Morley 階数が有限である群を，単に Morley 階数有限な群と呼ぶ．

例 3.93　(1) G を捩れのない (捩れ群が自明，有限位数の元がない) 可約な可換群とする．$\mathrm{Th}(G)$ は非可算範疇的なので，ω-安定である．

(2) p を素数，$\mathbb{F}_p$ を標数 p の素体とする．$\mathbb{F}_p$ 上の無限次元線形空間は全範疇的 (可算範疇的，かつ非可算範疇的) なので ω-安定群である．

(3) 構造 $(G, \cdot, 1, \ldots)$ が ω-安定な別の構造の中に翻訳可能な場合，構造 $(G, \cdot, 1, \ldots)$ も ω-安定である．よって代数的閉体の中に翻訳可能な群はすべて ω-安定である．

(4) ω-安定な群の例として，代数群は特に重要である．K を代数的閉体とする．$\mathrm{GL}_n(K)$ を K 上の一般線形群，すなわち K 上の 正則な $n \times n$-行列全体からなる群とする．行列 $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ を K^{n^2} の点とみなし，$\mathrm{GL}_n(K)$ を K^{n^2} の中のザリスキー閉集合 $V = \{(A, w) : w \cdot \det(A) = 1\}$. と同一視する．また $(A, w)(B, v) = (AB, wv)$ によって V に乗法を定義することができる．

K 上の線形代数群 G を考える．代数的閉体には代数的集合を閉集合とするザリスキー位相が入っている．この位相はネーター位相と呼ばれる．すなわち，閉集合の無限降下列が存在しないような位相である．G の部分群で代数群になっているようなものはザリスキー位相で閉集合なので，ネーター位相の性質から，線形代数群 G には部分代数群の無限降下列が存在しないことが分かる．

同じようなことが ω-安定群に対しても成り立つ．すなわち，ω-安定群には，定義可能な部分群の真の無限降下列は存在しないことを次に示そう．

まず簡単な性質を見ておこう．

G を ω-安定な群，H を G の定義可能部分群とする．$H \subseteq G$ なので，$\mathrm{RM}(H) \leq \mathrm{RM}(G)$ である．$a \in G \backslash H$ に対して $aH \cap H = \varnothing$ であり，また $x \longmapsto ax$ は定義可能全単射なので $\mathrm{RM}(H) = \mathrm{RM}(aH)$ が成り立つ．よってもし $[G:H]$ が無限ならば Morley 階数の定義から $\mathrm{RM}(H) < \mathrm{RM}(G)$ となる．また $1 < [G:H] < \aleph_0$ ならば $\mathrm{RM}(H) = \mathrm{RM}(G)$ だが $\deg_M(H) < \deg_M(G)$ でなければならない．実際，$\deg_M(G) = [G:H] \deg_M(H)$ である．このことを用いて ω-安定群には，定義可能な部分群の真の無限降下列は存在しないことを次に示す．

定理 3.94 G を ω-安定群とする．G には各 G_i が定義可能な部分群 (パラメーターを用いてもよい) であるような無限降下列

$$G > G_1 > G_2 > \cdots$$

が存在しない．

証明 群 G の Morley 階数を α とする．Morley 階数と Morley 次数の組 $(\mathrm{RM}(G_i), \deg_M(G_i))$ を考え，辞書式順序によって順序を入れる．もし，定義可能な部分群の無限降下列

$$G > G_1 > G_2 > \cdots$$

があったとすると，$\alpha \times \omega$ の中に辞書式順序による無限降下列が存在することになる．ところが $\alpha \times \omega$ は辞書式順序によって整列されているので無限降下列は存在しない．したがって，定義可能な部分群の無限降下列は存在しないことが分かる．□

この定理を用いると簡単に分かる性質を演習問題とする．

問題 8　G を ω-安定群とする．

(1) $\sigma : G \longrightarrow G$ を定義可能な単射準同型とする．このとき σ は全射である．

(2) H_i $(i \in \omega)$ を G の定義可能な部分群とする．このとき $\bigcap_{i\in\omega}$ は有限個の共通部分に等しい．すなわち，ある有限集合 $I \subset \omega$ が存在して，

$$\bigcap_{i\in\omega} H_i = \bigcap_{i\in I} H_i$$

が成り立つ．

(3) A を G の部分集合とする．A は定義可能である必要はない．このとき A の中心化群 $Z(A) = \{g \in G : \forall a \in A\,(ga = ag)\}$ は定義可能である．

ω-安定群には**連結成分**と呼ばれる特別な部分群が存在することを次に示そう．

定理 3.95　G を ω-安定群とする．G の定義可能部分群 G^0 で次の性質を持つものが存在する．

(1) $[G : G_0] < \aleph_0$ で，G^0 は $[G : H]$ が有限であるような G の定義可能部分群 H の中で最小である．

(2) G^0 の定義にパラメーターは必要ない．すなわち，空集合上で定義可能である．

(3) G^0 は正規部分群である．

証明　(1) $\mathcal{H} = \{H \leq G : H$ は定義可能かつ $[G : H] < \aleph_0\}$ とおく．上の問題より，この集合の共通部分は有限個の共通部分 $H_1 \cap H_2 \cap \cdots H_m$ $(H_i \in \mathcal{H})$ に等しい．$G^0 = H_1 \cap H_2 \cap \cdots H_m$ とおく．明らかに，$[G : G_0] < \aleph_0$ で，G^0 は $[G : H]$ が有限であるような G の定義可能部分群 H の中で最小である．

(2) $[G : G^0] = n$ とする．G^0 は定義可能な部分群なので，ある論理式 $\varphi(x, \bar{y})$ とパラメーター $\bar{a} \in G$ を用いて $G^0 = \{g \in G : G \models \varphi(g, \bar{a})\}$ となっている． ここで集合，

$$W = \{\bar{b} : \varphi(x, \bar{b}) \text{ は指数 } n \text{ の部分群を定義する }\}$$

が空集合上定義可能であることに注意する．この W を用いると

$$G^0 = \{g : \exists \bar{b}\ (\bar{b} \in W \wedge \varphi(g, \bar{b}))\}$$

と書けるので，G^0 は空集合上定義可能である．

(3) $h \in G$ に対して，$x \longmapsto hxh^{-1}$ は自己同型である．よって $hG^0h^{-1} = G^0$ が成り立つので，G^0 は正規部分群である． □

定義 3.96 G^0 を G の**連結成分**と呼ぶ．$G = G^0$ のとき，G は連結であるという．

連結成分の簡単な性質を演習問題とする．

問題 9 G を ω-安定群とする．$\sigma : G \longrightarrow G$ を定義可能な自己同型とすると $\sigma(G^0) = G^0$ である．

3.6.1 安定化群

G を ω-安定群とする．$p \in S_1(G)$ と $g \in G$ に対して

$$gp = \{\phi(x) : \phi(gx) \in p\}$$

と定義すると，$gp \in S_1(G)$ である．この対応 $g \longmapsto gp$ によって G は $S_1(G)$ に作用していると考えることができる．

$G \prec G'$ かつ $g \in G$ とする．$a \in G'$ が p の解だとすると，ga は gp の解である．

問題 10 $p \in S_1(G)$ とする．$\{g \in G : gp = p\}$ は G の部分群になっていることを示せ．

定義 3.97 $p \in S_1(G)$ とする．

$$\mathrm{Stab}(p) = \{g \in G : gp = p\}$$

を p の**安定化群**とよぶ．

注意 3.98 作用 $p \longmapsto pg$ に対しても同様の概念を定義することができる．両者を区別する必要がある場合は，$p \longmapsto gp$ に対する安定化群を特に**左安定化群**，$p \longmapsto pg$ に対する安定化群を**右安定化群**と呼ぶ．

命題 3.99 G を ω-安定群とする．$p \in S_1(G)$ の安定化群 $\mathrm{Stab}(p)$ は定義可能である．

証明 $L(G)$-論理式 $\phi(v)$ に対して，

$$\mathrm{Stab}^{\phi}(p) = \{g \in G : \text{任意の } h \in G \text{ に対して } (\phi(hv) \in p \Longleftrightarrow \phi(hgv) \in p)\}$$

とおく．$\mathrm{Stab}(p) = \bigcap_{\phi \in p} \mathrm{Stab}^{\phi}(p)$ であり，各 $\mathrm{Stab}^{\phi}(p)$ は G の部分群である．各タイプ p は定義可能である (定理 3.43) ことを用いて $\mathrm{Stab}^{\phi}(p)$ が定義可能であることを示せば，問題 8 (2) より $\mathrm{Stab}(p)$ の定義可能性が導かれる．

$\mathrm{Stab}^{\phi}(p)$ の定義可能性は次のようにして示す．論理式 $\phi(wv)$ に対して，タイプの定義可能性から $L(G)$-論理式 $d_p(w)$ で，任意の $h \in G$ に対して

$$\phi(hv) \in p \Longleftrightarrow G \models d_p\phi(h)$$

となるものが存在する．よって

$$\mathrm{Stab}^{\phi}(p) = \{g \in G : \forall h(d_p\phi(h) \longleftrightarrow d_p\phi(hg))\}$$

より $\mathrm{Stab}^{\phi}(p)$ は定義可能である．□

$G \prec G_1$ とする．補題 3.47 より任意の $p \in S_1(G)$ は定格的なので，G_1 上に唯一つの非分岐拡大 p_1 を持つ．$\mathrm{Stab}(p)$ は G 上定義可能であり，$\mathrm{Stab}(p_1)$ は G_1 上定義可能である．

補題 3.100　(1) $\mathrm{RM}(\mathrm{Stab}(p)) \leq \mathrm{RM}(p)$，(2) $\mathrm{Stab}(p) \leq G^{\circ}$．

証明　(1) $a, b \in \mathbb{G}$ を，$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_G b$, $a \models p$, $b \in \mathrm{Stab}(p)$ (すなわち b は $\mathrm{Stab}(p)$ を定義する論理式の解)，$\mathrm{RM}(b/G) = \mathrm{RM}(\mathrm{Stab}(p))$ となるようにとる．$\mathrm{RM}(ba/G, a) = \mathrm{RM}(b/G, a) = \mathrm{RM}(b/G) = \mathrm{RM}(\mathrm{Stab}(p))$ である．よって

$$\mathrm{RM}(\mathrm{Stab}(p)) = \mathrm{RM}(ba/G, a) \leq \mathrm{RM}(ba/G) = \mathrm{RM}(p)$$

である．

(2) G° を定義する論理式を $\psi(v)$ とする．$a \in \mathrm{Stab}(p)$ とし $b \in G$ を $\psi(b^{-1}v) \in p$ であるような元とすると $\psi(b^{-1}av) \in p$ である．$G \prec H$ とし $c \in H$ を p の解とする．このとき $b^{-1}ac \in H^{\circ}$ かつ $b^{-1}c \in H^{\circ}$ である．よって

$$(b^{-1}c)^{-1}b^{-1}ac = c^{-1}ac \in H^{\circ}$$

である．H° は正規部分群なので $a \in H^{\circ}$ である．よって $a \in G^{\circ}$ である．□

3.6.2 一般的タイプ

定義 3.101 G を ω-安定群, $\mathbb{G}$ を万有モデルとする. $p \in S_1(G)$ とする. $\mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(G)$ のとき, p を**一般的タイプ**と呼ぶ. $a \in \mathbb{G}$ が $\mathrm{RM}(a/G) = \mathrm{RM}(G)$ であるとき a を G 上一般的という.

基本的な性質を紹介する.

補題 3.102 (1) $\mathrm{tp}(x/G)$ を一般的タイプとする. $\mathrm{tp}(x^{-1}/G)$ も一般的タイプである. また任意の $a \in G$ に対して, $\mathrm{tp}(ax/G)$ も一般的タイプである.

(2) $p \in S_1(G)$ は一般的タイプ $\iff [G : \mathrm{Stab}(p)] < \aleph_0 \iff \mathrm{Stab}(p) = G^\circ$.

(3) G が連結であることと, G 上一般的なタイプは 1 つしかないことは同値である.

(4) $\deg_M(G) = [G : G^\circ]$.

証明 (3) のみ示す. 残りは演習問題とする. まず G 上の一般的タイプが 1 つしかないとして p をそのタイプとする. 任意の $a \in G$ に対して ap も一般的タイプなので $ap = p$ である. よって $G = \mathrm{Stab}(p)$. $\mathrm{Stab}(p) = G^\circ$ だから $G = G^\circ$ となって G は連結である.

逆に G を連結とする. p, q を G 上の異なる一般的タイプとする. $a, b \in \mathbb{G}$ を $a \models p$, $b \models q$, $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}_G b$ であるようにとる. $ba \models p$ かつ $ba \models q$ となって矛盾することを示す. G_1 を b を含む G の初等拡大とする. $a \notin G_1$ として一般性を失わない. $p_1 \in S_1(G_1)$ を p の非分岐拡大とする. p は定格的なので, p_1 は p に対して唯一つだけ定まる. a_1 を p_1 の解とする. a と a_1 はともに p の $G \cup \{b\}$ 上への唯一つの非分岐拡大の解になっているので, $\mathrm{tp}(a, b/G) = \mathrm{tp}(a_1, b/G)$ である. G が連結なので G_1 も連結であり, p_1 は G_1 の一般的タイプである. よって $\mathrm{Stab}(G_1) = G_1$ である. よって ba_1 は p_1 の解になっている. したがって ba_1 は p の解になっているので ba は p の解になっている. 左安定化群の代わりに右安定化群を用いて同様な議論をすれば, ba が q の解になっていることも分かる. □

補題 3.103 (1) $g \in G$ とすると G 上一般的な元 $a, b \in \mathbb{G}$ で $g = ab$ となるものが存在する.

(2) G を連結な ω-安定群, $A \subseteq G$ を定義可能部分群で $\mathrm{RM}(A) = \mathrm{RM}(G)$ とする. このとき $G = A \cdot A = \{ab : a, b \in A\}$ である.

(3) $A \subseteq G$ を $\mathrm{RM}(A) = \mathrm{RM}(G)$ であるような定義可能部分集合とする．このとき有限個の元 $a_1, \cdots, a_n$ が存在して $G = a_1 A \cup \cdots \cup a_n A$ である．

証明　(1) $a \in \mathbb{G}$ を G 上一般的な元とする．$x \longmapsto gx^{-1}$ は定義可能な，G から G の上への 1 対 1 写像なので $b = ga^{-1}$ も G 上の一般的な元である．よって $g = ab$ である．

(2) A を定義する $L(G)$-論理式を $\phi(v)$ とする．任意な $g \in G$ に対して，G 上一般的な元 $a, b \in \mathbb{G}$ で $g = ab$ となっているものが存在する．仮定から G 上の一般的タイプは唯一つしかなく，$\mathrm{RM}(A) = \mathrm{RM}(G)$ なので a, b はともに $\phi(v)$ の解である．よって

$$\mathbb{G} \models \exists x \exists y (\phi(x) \wedge \phi(y) \wedge g = xy)$$

が成り立っている．$G \prec \mathbb{G}$ なので $g = a'b'$ となる $a', b' \in A$ が存在する．よって $G = A \cdot A$ である．

(3) $[G : G_0]$ は有限なので G が連結な場合を示せば十分である．$\phi(v)$ を A を定義する $L(G)$-論理式，p を G 上の一般的タイプとする．

主張： 任意の $q \in S_1(G)$ に対して $\phi(gv) \in q$，すなわち $\phi(v) \in gq$ となるような $g \in G$ が存在する．

この主張を示すために，a を p の解，b を q の解とし $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_G b$ であるとする．ab は G 上一般的なので ab は $\phi(v)$ の解である．タイプの定義可能性により任意の $h \in G$ に対して，

$$\phi(h \cdot v) \in q(v) \Longleftrightarrow G \models d_q \phi(h)$$

であるような $L(G)$-論理式 $d_q\phi(w)$ が存在する．q の $G \cup \{a\}$ への非分岐拡大は 1 つしかなく，b はその解になっている．よって $\phi(a \cdot v) \in q(v)$，したがって $\mathbb{G} \models d_q\phi(a)$ である．ゆえに $\mathbb{G} \models \exists w\, d_q\phi(w)$ である．$G \prec \mathbb{G}$ なので，$\phi(g \cdot v) \in q(v)$ であるような $g \in G$ が存在する．

さて，各 $g \in G$ に対し，$O_g = \{q \in S_1(G) : \phi(g \cdot v) \in q(v)\}$ とおく．O_g は $S_1(G)$ の開集合である．主張より，$S_1(G) = \bigcup_{g \in G} O_g$ であり，$S_1(G)$ はコンパクト空間なので，

$$S_1(G) = O_{a_1} \cup \cdots \cup O_{a_n}$$

となる $a_1, \cdots, a_n \in G$ が存在する．特に各 $g \in G$ に対して，論理式 “$v = g$” を含む唯一なタイプを $q(v)$ とすると，$q \in O_{a_i}$ であるような自然数 i が存在する．このとき $a_i g$ は $\phi(v)$ の解であり，$g \in a_i^{-1}A$ である．よって $G = a_1^{-1}A \cup \cdots \cup a_n^{-1}A$ である． □

3.6.3 Macintyre の定理

ここでは，ω-安定な体 K，すなわち $\mathrm{Th}(K)$ が ω-安定な体は代数的閉体であるということを証明する．1.4.2 節で量記号を消去する体は代数的閉体であることを証明したことを思い出してほしい．そのときの証明同様，

(1) ω-安定な体は，完全体である．

(2) ω-安定ならば，すべての代数方程式の解を持つ．

の順で証明する．ガロア理論からの定理が必要であるので,『可換体論 (新版)』(永田雅宜著，裳華房) から基本的な定理を 2 つ引用する (あるいは,『体とガロア理論』(藤崎源二郎著，岩波基礎数学選書) の巡回拡大の例の項，Kummer 拡大と，Artin-Schreier 拡大参照，194 頁から 201 頁).

定理 3.104 (1) (Kummer 拡大) 体 L が K の n 次巡回拡大であって，標数 p が 0 であるか，または p と n が素であるものとする．もし K が 1 の n 乗根をすべて含む，すなわち $x^n - 1$ の分解体であるならば，$L = K(\theta)$ となる元 θ で，その最小多項式が $x^n - a$ $(a \in K)$ の形であるものが存在する (定理 2.9.8，68 頁).

(2) (Artin-Schreier 拡大) 体 K の標数を $p > 0$ とし，L/K を p 次巡回拡大とする．このとき $c \in K$ を適当にとれば，$f_c(x) = x^p - x - c$ の最小分解体が L になる．逆に，任意の $c \in K$ に対して，$f_c = x^p - x - c$ の根の 1 つが α であれば，$f_c(X)$ の根は，$\alpha, \alpha + 1, \cdots, \alpha + (p-1)$ の p 個である．そして，$\alpha \notin K$ であれば，$f_c(x)$ の分解体 $L = K(\alpha)$ は K の p 次巡回体である (定理 2.9.10，70 頁).

定理 3.105 (Macintyre) $(K, \cdot, +, \cdots)$ を ω-安定体とする．このとき，K は代数的閉体である．

証明　モデル理論を用いて，K が完全体であることを示すのが第一段階である．まず，$(K, \cdot, +, \cdots)$ の加法群が連結であることを示そう．

K^0 を加法群の連結成分とする．$a \in K \backslash \{0\}$ を任意にとる．$x_1, x_2 \in K$ に対して $a(x_1+x_2) = ax_1 + ax_2$ だから，$x \longmapsto ax$ によって定まる K の加法群の自己同型は定義可能である．ω-安定群には，定義可能な部分群の真の無限降下列は存在しないので $aK^0 = K^0$ である．a は任意であったから，K^0 が体 K のイデアルであることが分かった．よって $K^0 = K$ である．したがって，K の加法群が連結であることが分かった．連結性の定義から，K は 唯一の一般的タイプを持つ．したがって，$(K, \cdot, +, \cdots)$ の乗法群も連結である．

さて，任意の正整数 n に対して，写像 $x \longmapsto x^n$ は乗法に関する準同型である．a を生成元とする．a と a^n は相互代数的なので，a^n も一般元である．よって K^n は一般元を含むことがわかる．K^n は K の部分群であり，K の乗法群は連結なので，$K^n = K$ でなければならない．すなわち，K の元の n 乗根が K に存在する．よって K は完全体である．

次に K が代数的閉体であることを示そう．もしそうでないとすると K は完全体なので，K は有限次ガロア拡大体 L を持つ．L として拡大次数 $[L : K]$ が極小であるものを考える．F を体 K と L の中間体とする．このとき，拡大 $F < L$ はやはりガロア拡大になるので，ガロア拡大 $K < L$ の極小性に反する．よって，K と L の間に中間体は存在しない．よって，p を素数とし，$[L : K] = p$ とすると，群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ は位数 p の巡回群になっている．多項式 $X^p - 1$ の分解体の K 上の拡大次数は p より小さいので，1 の p 乗根はすべて K に入っている．

$\mathrm{ch}(K) = p$ の場合．L は K の Artin-Screier 拡大である．すなわち，ある $c \in K$ に対して，L は $x^p - x - c$ の最小分解体になっている．ここで $f : x \longmapsto x^p - x$ という K から K への写像について考える．この写像は加法に関する準同型になっている．a を K の一般元とすると $a^p - a$ は a と相互に代数的なので，$a^p - a$ も一般的元である．K の加法群の連結性から $f(K) = K$ でなければならない．よって $f(d) = c$ となる元 d が K に存在する．これは $x^p - x - c$ が可約であることを意味する．すなわち，L と K の間に中間体が存在することになって，仮定に反する．

$\mathrm{ch}(K) \neq p$ の場合．K は 1 の p 乗根をすべて含んでいるので，L は K の Kummer

拡大である．すなわち，ある $a \in K$ に対して，$x^p - a$ の解を θ とすると $L = K(\theta)$ である．$x \longmapsto x^p$ という自己準同型を考えると，K の連結性から全射であることが分かる．よって $x^p - a$ は可約になり L と K の間に中間体が存在しないという仮定に反する．よって K は代数的閉体でなければならない． □

次に，1.4.2 節の証明とほとんど同じ論法の証明を紹介する．そのために補題が 1 つ必要である．

補題 3.106　G を ω-安定群，$A \subseteq G$ とする．$a_1, \cdots, a_n$ を A 上独立な，一般元たちの列とする．n 個の G の元 b_i たちに対して，$a_1, \cdots, a_n \in \mathrm{acl}(b_1, \cdots, b_n, A)$ ならば $b_1, \cdots, b_n$ たちも A 上独立な一般元たちである．

証明　$\mathrm{RM}(a_i/A) = r$ とすると，$\mathrm{RM}(a_1, \cdots, a_n/A) = nr$ である．a_i たちはすべて $\mathrm{acl}(b_1, \cdots, b_n, A)$ に入っていてかつ A 上独立だから，$\mathrm{RM}(b_1, \cdots, b_n/A) \geq nr$ でなければならない．ところで各 $\mathrm{RM}(b_i/A) \leq r$ だから，$\mathrm{RM}(b_i/A) = r$ であることが分かる．よって各 b_i は一般元で，Morley 階数の性質から A 上独立でなければならない． □

さてこの補題を用いて，Macintyre の定理を証明する．すなわち，ω-安定体 F が代数的閉体であることを示す．

(1) F は完全体である．

証明　標数が 0 の体は完全体なので，$\mathrm{ch}(F) = p > 0$ の場合を考える．$\mathrm{Fr} : F \longrightarrow F$ を $x \longmapsto x^p$ によって定義すると $(x+y)^p = x^p + y^p$ より Fr は $(F, +, 0)$ の自己準同型である．よって上の補題から $F^p = \mathrm{Fr}(F)$ の Morley 階数は F と同じである．よって $(F : F^p) < \omega$ である．しかし，$(F, +, 0)$ は連結なので $(F : F^p) = 1$，すなわち $F = F^p$ である．よって p-乗根を持つので F は完全体である． □

(2) $a_0, \cdots, a_{n-1}$ を素体上独立な F の一般元とする．このとき，方程式

$$X^n + a_0 X^{n-1} + \cdots a_{n-2} X + a_{n-1} = 0 \tag{1}$$

の解はすべて F に入っている．

証明　$b_0, \cdots, b_{n-1}$ を独立な F の一般元たちとする．$c_0, \cdots, c_{n-1}$ を $b_0, \cdots, b_{n-1}$ の基本対称式とすると $b_0, \cdots, b_{n-1}$ は，方程式

$$X^n + c_0X^{n-1} + \cdots c_{n-2}X + c_{n-1} = 0 \tag{2}$$

の解全体と一致する．各 b_i は F の元だから，各 c_i も F の元である．また，$b_0, \cdots, b_{n-1} \in \mathrm{acl}(c_0, \cdots, c_{n-1})$ なので上の補題より $c_0, \cdots, c_{n-1}$ も独立な一般元である．一般的タイプは 1 つしか存在しないから

$$\mathrm{tp}(a_0, \cdots, a_{n-1}/\varnothing) = \mathrm{tp}(c_0, \cdots, c_{n-1}/\varnothing)$$

である．方程式 (2) は n 個の解を F に持つので，方程式 (1) も n 個の解を F に持つ．すなわち (1) の解はすべて F に入っている．□

(3) F-係数のすべての方程式の解は F に入っている．すなわち F は代数的閉体である．

証明　F が代数的に閉じていないとする．F-係数の方程式，

$$p(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \quad (a_i \in F)$$

の解は F に入っていないとする．F は完全体なので，$p(X)$ の解はすべて異なり，どれも F に入っていない．それらを $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とする．$L = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ とおく．L は F のガロア拡大である．F の超越次数は無限だと仮定しても一般性を失わないことに注意する (必要ならば F の初等拡大で考える)．$t_0, \cdots, t_{n-1} \in F$ を $\{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ から独立な一般元たちとする．各 $i = 1, \cdots, n$ に対して，

$$r_i = t_0 + t_1\alpha_i + t_2\alpha_i^2 + \cdots + t_{n-1}\alpha_i^{n-1}$$

とおく．さらに，$c_0, \cdots, c_{n-1}$ を $r_1, \cdots, r_n$ の基本対称式とする．各 c_i は $\mathrm{Gal}(L/F)$ の各元によって動かないので F の元である．

- 各 $i = 0, \cdots, n-1$ に対して，$t_i \in F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, r_1, \cdots, r_n)$ である．
- L の中で考えると，各 r_i は代数の意味で，$\{c_1, \cdots, c_n\}$ 上代数的である．

よって，F の中で考えると，各 $i = 0, \cdots, n-1$ に対して，

$$t_i \in \mathrm{acl}(a_0, \cdots, a_{n-1}, c_0, \cdots, c_{n-1})$$

である．よって上の補題から $c_0, \cdots, c_{n-1} \in F$ は $\{a_0, \cdots, a_{n-1}\}$ から独立な一般元である．$r_1, \cdots, r_n$ は $\pm c_0, \cdots, \pm c_{n-1}$ を係数とする方程式の解なので (2) よりすべて F の元である．そうすると r_i の定義の仕方から，各 α_i は $n-1$ 次方程式の

解になっている．これは α_i の最小多項式 $p(X)$ の次数が n であることに反する．□

3.6.4　Zilber 既約性定理

以下の議論では，Morley 階数有限な群に関する Zilber の既約性定理と呼ばれる重要な定理が活躍する．そのために定義可能部分集合に対して，既約性という概念を導入する．

定義 3.107　群 G の定義可能部分集合 X を考える．G の任意の定義可能部分群 H に対して，X が H の有限個の左剰余類で覆われるならばちょうど 1 個の左剰余類で覆われる，すなわち $X \subseteq g_1H \cup \cdots \cup g_nH$ (ただし各 $g_i \in G$) ならばある i に対して $X \subseteq g_iH$ が成り立つとき，X を**既約**という．n の値は H ごとに変化してもよい．

定義可能な無限部分群は，**連結ならば既約であること**がすぐに分かる．実際，$X \leq G$ を定義可能な連結無限部分群とする．各定義可能部分群 $H \leq G$ に対して，$a, b \in X$ ならば「$aH = bH \Longleftrightarrow b \in a(X \cap H)$」が成り立っている．よって

$$|X/H| = |\{xH \cap X : x \in X\}| = [X : X \cap H]$$

である．X は連結なので $|X/H|$ は有限ならば 1 である，したがって X は既約である．

定理 3.108 (Zilber 既約性定理)　G を Morley 階数有限な群とする．$\{X_i : i \in I\}$ を既約な定義可能集合の集まりとし，各 X_i は G の単位元 1 を含んでいるとする．このとき $\bigcup_{i \in I} X_i$ によって生成される G の部分群は定義可能かつ連結である．

証明　$\sigma = (i_1, \cdots, i_n) \in I^{<\omega}$ に対して，

$$X^\sigma = \{x_1 \cdots x_n \in G : x_1 \in X_{i_1}, \cdots, x_n \in X_{i_n}\}$$

とおく．X^σ は G の定義可能部分集合である．$\mathrm{RM}(G) < \omega$ だから $\mathrm{RM}(X^\sigma)$ が最大値 k をとるような σ が存在する．論理式 “$v \in X^\sigma$” を含み，Morley 階数が k であるような $p(v) \in S_1(G)$ を考える．$H = \mathrm{Stab}(p)$ とおく．この H が $\bigcup_{i \in I} X_i$ によって生成される部分群であることを示す．

まず各 $i \in I$ に対して $X_i \subseteq H$ である．

もしそうでなければ，$1 \in X_i \cap H$ かつ $X_i \not\subseteq H$ だから $|X_i/H| > 1$ である．X_i は既約なので，無限個の $a_1, a_2, \cdots \in X_i$ が存在して，$m \neq n$ ならば $a_m H \neq a_n H$ となっている．$a_n^{-1} a_m \notin H = \mathrm{Stab}(p)$ だから，$m \neq n$ ならば $a_m p \neq a_n p$ である．よって $a_1 p, \cdots, a_m p, \cdots$ は，それぞれ Morley 階数 k の，互いに異なる無限個のタイプである．各タイプ $a_n p$ は論理式 "$v \in X_i \cdot X^\sigma$" を含んでいるので，$\mathrm{RM}(X_i \cdot X^\sigma) \geq k+1$ となって，σ の取り方に反する．

したがって，$\bigcup_{i \in I} X_i$ によって生成される部分群は H に含まれることが分かった．$H = \mathrm{Stab}(p)$ だから $\mathrm{RM}(H) \leq \mathrm{RM}(p) = \mathrm{RM}(X^\sigma) \leq \mathrm{RM}(H)$ である．よって p は H の一般的タイプである．補題 3.102 より，ω-安定な群は一般的タイプ全体の上に推移的に作用している．一方 $H = \mathrm{Stab}(p)$ は p を動かさない．したがって H は連結でなければならない．$\mathrm{RM}(X^\sigma) = \mathrm{RM}(H)$ だから補題 3.103 より $H = X^\sigma \cdot X^\sigma$ である．よって H は $\bigcup_{i \in I} X_i$ で生成される群に含まれる．したがって H は $\bigcup_{i \in I} X_i$ で生成される G の部分群そのものであり，しかも連結である．　□

群 G の元 g, h に対して，hgh^{-1} を g^h と書く．また，部分群 $H \leq G$ に対して，$g^H = \{g^h : h \in H\}$ とおく．また $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$ を g と h の交換子と呼ぶ．

系 3.109　G を ω-安定群，H を G の連結な定義可能部分群とする．このとき任意の $g \in H$ に対して g^H は既約である．

証明　g^H が既約であることを示すには，任意の定義可能部分群 $N \leq G$ に対して，g^H が N の複数の剰余類にまたがって覆われることがないことを示さなければならない．しかし，任意の $h \in H$ に対して $hNh^{-1} = N$ であるような定義可能部分群 $N \leq G$ に対してだけ g^H の既約性を調べればよいことをまず示す．

$F \leq G$ を任意の定義可能部分群とし，$g^H \subseteq x_1 F \cup \cdots \cup x_n F$ とする．ただし各 x_i は G の元とする．任意の $h \in H$ に対して

$$g^H \subseteq x_1^h F^h \cup \cdots \cup x_n^h F^h$$

である．F^h も定義可能部分群なので，ω-安定群には定義可能部分群の無限降下列が存在しないので，有限個の $h_1, \cdots, h_m \in H$ が存在して，

$$P := \bigcap_{h \in H} F^h = \bigcap_{i=1}^{m} F^{h_i} \leq F$$

が成り立つ．よって

$$g^H \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} (x_1^{h_i} F^{h_i} \cup \cdots \cup x_n^{h_i} F^{h_i})$$

ゆえに

$$g^H \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} a_j P$$

P は定義可能で，さらに任意の $h \in H$ に対して $hPh^{-1} = P$ である．よって，$g^H \subseteq a_j P \subseteq a_j F$ がある j に対して成り立つ．よって $a_j F = x_i F$ である．

よって，g^H が，任意の $h \in H$ に対して $hNh^{-1} = N$ であるような定義可能部分群 $N \leq G$ に対して既約であることを示す．

$$g^H \subseteq a_1 N \cup \cdots \cup a_n N$$

であるような最小値を m とする．$a_1 = g$ として一般性を失わない．任意の $h \in H$ に対して，

$$g^H \subseteq a_1^h N \cup \cdots \cup a_m^h N$$

である．よって各 i に対して $a_i^h N = a_j N$ であるような j が 1 つだけ存在する．よって H は $\{a_1 N, \cdots, a_m N\}$ に作用している．H は連結なので $m = 1$ でなければならない．すなわち $g^H \subseteq a_1 N$ となって g^H が連結であることが示された．□

系 3.110　G を連結な ω-安定群とし，Morley 階数は有限であるとする．このとき G の交換子群 $G' = [G, G] = \{[g, h] : g, h \in G\}$ は連結な定義可能部分群である．

証明　上の系から g^G は既約である．よって $g^{-1}(g^G)$ も既約である．$1 \in g^{-1}(g^G)$ かつ G' は $(g^{-1}(g^G) : g \in G)$ によって生成される．したがって Zilber 既約性定理より，交換子群 G' は定義可能かつ連結である．□

定理 3.111　G を Morley 階数有限な ω-安定で非可換な無限群とする．G は自明でない定義可能正規部分群を持たないとすると，G は単純群である．

証明　仮定から，$G^\circ = G$ でなければならないので，G は連結である．$a, g, h \in G$ に対して，

$$a^g = a^h \iff g \in hC(a)$$

である．よって a^G が有限ならば，$[G : C(a)] < \omega$ である．G は連結だから，この場合 $G = C(a)$ となって $a \in Z(G)$ である．$Z(G)$ は G の定義可能正規部分群であり，G は非可換だから $Z(G) = \{1\}$ である．したがって，$a \in G\backslash\{1\}$ ならば a^G は無限集合である．

G が単純群でないとする．$N \neq \{1\}$ を G の正規部分群とし，$a \in N\backslash\{1\}$ をとる．$X = a^{-1}(a^G)$ とおくと，X は既約である．任意の $g \in G$ に対して gXg^{-1} も既約であり，$gXg^{-1} \subseteq N$ である．$(gXg^{-1} : g \in G)$ によって生成される N の部分群を H とおくと，a^G が無限集合なので $H \neq \{1\}$ である．Zilber 既約性定理から H は定義可能である．H が正規部分群であることが次のようにしてわかる．

$h = (g_1 x_1 g_1^{-1}) \cdots (g_n x_n g_n^{-1})$，ただし $x_1, \cdots, x_n \in X$ とすると，

$$ghg^{-1} = (gg_1 x_1 g_1^{-1} g^{-1}) \cdots (gg_n x_n g_n^{-1} g^{-1}) \in H$$

である．したがって H は正規部分群である．これは，G が自明でない定義可能正規部分群を持たないという仮定に反する．よって G は単純群である．　□

3.6.5　強極小群は可換群である (Reineke の定理)

前小節までは ω-安定群 G の基本的な性質を述べてきたが，G の Morley 階数が小さいときには G の構造をより正確に述べることができる．以下，RM(G) が 1 と 2 の場合について調べよう．Morley 階数が 1 の場合について，まず G が極小であるときの性質を調べる．

定理 3.112 (Reineke)　G を ω-安定で，$L(G)$-論理式で定義可能な真部分無限群を持たないとする．このとき，G は可換群である．

証明　G が可換群でないと仮定すると矛盾することを示す．G の中心 $Z(G)$ は定義可能部分群なので，仮定から $Z(G)$ は有限群である．同様に任意の $a \in G\backslash Z(G)$ に対して，a の中心化群 $C_G(a) = \{g \in G : ag = ga\}$ も有限である．$a \in G\backslash Z(G)$ とし，b を a 上の一般的な元とする．このとき，

$$\{c : cac^{-1} = bab^{-1}\} = \{c : b^{-1}ca = ab^{-1}c\} = \{c : b^{-1}c \in C_G(a)\}$$

であり，すべて b を含む有限集合である．よって b は $\{a, bab^{-1}\}$ 上代数的である．したがって $\mathrm{RM}(bab^{-1}/a) = \mathrm{RM}(b/a)$ であり，bab^{-1} も a 上の一般的な元である．よって $a^G = \{gag^{-1} : g \in G\}$ は G の一般的部分集合である．

$a, b \in G \backslash Z(G)$ とする．G は連結だから，一般的タイプは 1 つしかない．したがって $a^G \cap b^G \neq \varnothing$ であり，実際 $a^G = b^G$ である．つまり $a, b \in G \backslash Z(G)$ とすると $a = cbc^{-1}$ となる $c \in G$ が存在する．

$H = G/Z(G)$ とおくと，H は無限な ω-安定群で単位元 1 以外の任意の 2 つの元は互いに共役である．よってすべて同じ位数を持つ．そしてその位数は 2 ではない．もし 2 なら H は可換群になるが，そうすると $a \in H$ ならば $a^H = \{a\}$ になってしまい，a^H が一般的であることに反する．

H のすべての元は同じ位数 $n > 2$ を持つが，n は素数でなければならないことは明らか．$a \in H$ とすると $a \neq a^{-1}$ は共役だから $bab^{-1} = a^{-1}$ となる $b \in H$ が存在する．$ba^{-1}b^{-1} = a$ である．よって $k \geq 1$ のとき，

$$b^k a b^{-k} = \begin{cases} a & (k \text{ は偶数}) \\ a^{-1} & (k \text{ は奇数}) \end{cases}$$

である．さて位数 n は素数だから $b^n a b^{-n} = a^{-1}$ である．ところが $b^n = 1$ だから $a = a^{-1}$ となって，a の位数が 2 になってしまって矛盾する． □

系 3.113 (1) G を ω-安定な無限群とする．このとき G の定義可能部分群で可換なものが存在する．

(2) $\mathrm{RM}(G) = 1$ ならば，G は可換群 × 有限 という形をしている．すなわち指数有限な，定義可能可換部分群が存在する．

3.6.6 Morley 階数 2 の連結な群は可解群である (Cherlin の定理)

次に問題になるのは Morley 階数が 2 の場合である．連結な場合は可解群になるという Cherlin の定理を証明する．この定理は，5 章でザリスキー幾何の中に体を定義するときに利用される．

Morley 階数 2 の冪零群に関してはさまざまな定理が知られている．Cherlin の定理を証明する前に，結果をいくつかまとめておこう．

例 3.114 (Morley 階数 2 の冪零群)　G を Morley 階数 2 の冪零群とする．

(1) 連結で，可換でないとする．このとき G の元の位数は p または p^2 である．ただし p はある素数 (Cherlin).

(2) 非可換な G で，元の位数が 4, p, p^2 (p は 3 以上の任意の素数) のものが存在する (田中克己).

(3) 連結かつ非可換で，無限体を翻訳できないものが存在する (Baudisch).

以下この小節では，群 G は Morley 階数有限な ω-安定群とする．

補題 3.115　G が連結で中心 $Z(G)$ が有限ならば，$G/Z(G)$ の中心は自明である．

証明　$z \in Z_2(G) = \{g \in G : [g, G] \leq Z(G)\}$ とする．

$$\mathrm{ad}(z) : G \longrightarrow Z(G)$$

$$g \longmapsto [z, g] = z^{-1}g^{-1}zg$$

と定義すると，$\mathrm{ad}(z)$ は準同型である．$Z(G)$ が有限なので $\ker(\mathrm{ad}(z)) = C_G(z)$ より $[G : C_G(z)]$ は有限である．仮定より G は連結なので $C_G(z) = G$ となり，$z \in Z(G)$ であることが分かる．よって $Z_2(G) = Z(G)$ となって $G/Z(G)$ の中心は自明である．□

Cherlin の定理の証明*)　Morley 階数 2 の連結な群 G は可解群であることを示す．証明は背理法で行う．G は可解でないとする．G が Morley 階数 1 の定義可能正規部分群 B を持ったとする．$\mathrm{RM}(G/B) = \mathrm{RM}(B) = 1$ となるので Reineke の定理 3.112 より，G/B と B はともに可換群となり G は可解群になる．よって G は Morley 階数 1 の定義可能正規部分群を持たないとして証明を進める．

この場合 $Z(G)$ は有限でなければならず，上の補題から $G/Z(G)$ の中心は自明である．ゆえに初めから G の中心が自明だとして一般性を失わない．よって定理 3.111 より G は単純群である．

G の部分群で，定義可能，連結さらに可解という 3 つの性質を持つ極大な部分群を，代数群の用語を借用して **Borel 部分群**と呼ぶ．再び Reineke の定理より G は Morley 階数 1 の Borel 部分群を持つ．これらはすべて連結だから極小群であり，可

---

*) 田中克己氏の御教示に感謝します．

換群である．G の Borel 部分群は次の性質を持つ．

(1) 異なる Borel 部分群の共通部分は単位元だけである．

証明：B_1, B_2 を異なる Borel 群とする．$1 \neq g \in B_1 \cap B_2$ とする．$\mathrm{RM}(B_1 B_2) = 2$ かつ $C_G(g) \supseteq B_1 B_2$ より $\mathrm{RM}(C_G(g)) = 2$ となり，$C_G(g) = G$ となる．$g \in Z(G)$ となって G の中心が自明であることに反する．(終わり)

(2) B を Borel 群とする．$N_G(B)/B$ は有限群である．ただし，$N_G(B) = \{g \in G : B^g = B\}$.

証明：$N_G(B)/B$ が無限だとすると，$N_G(B) = G$ となって B は G の正規部分群になる．これは G が単純群であることに反する．(終わり)

(3) $\bigcup_{g \in G} B^g$ は G の一般的部分集合である．すなわち $\mathrm{RM}\left(\bigcup_{g \in G} B^g\right) = \mathrm{RM}(G)$ である．

証明：$B^g = B$ とすると $g \in N_G(B)$ である．各 g に対して $\mathrm{RM}(B^g) = 1$ だから $\mathrm{RM}(N_G(B)) = 1$ に注意すれば結果が成り立つ．(終わり)

(4) 任意の $x \in G$ に対して，$C_G(x)$ は無限群である．

証明：$C_G(x)$ が有限だとすると x^G は一般的である．よって $x^G \cap \bigcup_{g \in G} B^g \neq \varnothing$ である．よって $x^h \in B^g$ となる h, g が存在する．よって $x \in B^{gh^{-1}}$ である．$B^{gh^{-1}}$ は可換群だから $C_G(x)$ は無限になってしまって矛盾する．(終わり)

(5) $1 \neq x \in G$ に対して $C_G(x)$ に含まれる Borel 群は 1 個だけである．

証明：$C_G(x)^\circ$ は Borel 群なので，$C_G(x)$ は Borel 群を少なくとも 1 個含む．もし $C_G(x)$ が異なる Borel 群 B_1, B_2 を含むとすると $\mathrm{RM}(C_G(x)) = 2$ となって G の中心が自明なことに反する．(終わり)

(6) Borel 部分群は互に共役である．

証明：B_1, B_2 を異なる Borel 群とする．(3) から $\bigcup_{g \in G} B_1^g \cap \bigcup_{h \in G} B_2^h \neq \varnothing$ である．よって $B_1^g \cap B_2^h \neq \varnothing$ となる g, h が存在する．(1) より $B_1^g = B_2^h$ となるので B_1 と B_2 は共役である．(終わり)

(5) より，任意の $x \neq 1$ に対して $C_G(x)$ は唯一の Borel 群を含むのでそれを $B(x)$ と書く．

主張 1： 任意の $x \in G$ に対して，$x \in B(x)$ である．

まず $1 \neq y \in G$ かつ $z \in B(y)$ ならば $z \in B(z)$ である．なぜなら $B(y)$ は可換群だから $B(y) \subseteq C_G(z)$ である．$C_G(z)$ は Borel 群を 1 個しか含まないから $B(y) = B(z)$ である．よって $z \in B(z)$ である．主張 1 が正しくないとして，$A = \{x \in G : x \notin B(x)\}$ を考える．$x \in A$ とすると $xB(x) \subseteq A$ である．なぜなら $b \in B(x)$ とすると $b \in B(b)$ である．よって $z \in B(x)$ ならば $z \in C_G(x) \cap C_G(b)$ である．また $z(xb) = x(zb) = (xb)z$ だから $z \in C_G(xb)$ である．よって $B(x) \subseteq C_G(xb)$ である．よって $b \in B(x)$ ならば $B(x) = B(xb)$ がわかる．したがって $x \in A$ ならば，$xB(x) \subseteq A$ である．また

$$z \in xB(x) \Longrightarrow (zB(z) = zB(x) = xB(x))$$

なので，$xB(x)$ の共役は互に交わらない．$x \in A$ ならば $x^G \subseteq A$ なので A は無限集合である．よって $\mathrm{RM}(A) = 2$ である．しかしこれは $\bigcup_{g \in G} B^g$ が G の一般的部分集合であることに反する．よって $A = \varnothing$，すなわち任意の $x \in G$ に対して $x \in B(x)$ である．つまり各 Borel 部分群 B に対して $B = C_G(B)$ が成り立っている．

主張 2： Borel 部分群 B に対して，$N_G(B) = B$ である．

$a \in N_G(B) \backslash B$ とし，$C = a^G$ とおくと，C は強極小集合である．$C_1 = C \cap N_G(B)$, $C_2 = C \backslash C_1$ とおく．C_1, C_2 はともに定義可能である．$a \in C_1$ だから $C_1 \neq \varnothing$ である．

$C_2 = \varnothing$ とすると，$C = a^G \subseteq N_G(B)$ となる．G は単純群なので，a^G は G を生成する．よって B は G の正規部分群である．これは G が単純群であることに反する．よって $C_2 \neq \varnothing$ である．ここで $B = N_G(C_1)$ かつ $B = N_G(C_2)$ すなわち B は C_1, C_2 をともに正規化することに注意する．$C = C_1 \cup C_2$ で，C は強極小集合だから C_1, C_2 のどちらかは有限でなければならない．もし C_1 が有限ならば，B は連結でかつ $B = C_G(C_1)$ なので $a \in C_1 \subseteq C_G(B) = B$ となって矛盾する．もし C_2 が有限ならば，$B \subseteq C_G(C_2)$ となるが，これもあり得ない．よって $N_G(B) = B$ でなければならない．

主張 3： G の各元 $x \neq 1$ に対して，$C_G(x)$ は Borel 部分群である．したがって，$G = \bigcup_{g \in G} B^g$ である．

$B = C_G(x)^\circ$ とおく．まず B が $C_G(x)$ の正規部分群であるので $N_G(B) > C_G(x)$

である．よって $N_G(B) > C_G(x) > C_G(x)^\circ = B$ である．主張 2 より $N_G(B) = B$ なので $B = C_G(B)$ である．つまり $C_G(x)$ は Borel 群である．

主張 4： G には $x^2 = 1$ となる元 $x \neq 1$ がある．

B を Borel 群とし，$a \notin B$ をとる．$b, b', b_1, b'_1 \in B$ に対して

$$bab_1 = b'ab'_1 \Longrightarrow (b = b' \wedge b_1 = b'_1) \tag{1}$$

である．これを示そう．$Ba = aB$ とすると $B^a = B$ となって $a \in N_G(B) = B$ となって矛盾．よって $B^a \neq B$．ゆえに $a^{-1}Ba \cap B = \{1\}$ である．仮定から $bab_1 = b'ab'_1$ だから $a^{-1}(b')^{-1}ba = b'_1b_1^{-1}$ である．よって $b'_1b_1^{-1} = 1$ すなわち $b_1 = b'_1$ である．同様に $b = b'$ である．よって (1) が示された．

$\mathrm{RM}(BaB) = \mathrm{RM}(G)$ である．よって $G = B \cup BaB$ である．したがって $a^{-1} \in BaB$，すなわち $a^{-1} = b_1ab$ となる $b, b_1 \in B$ が存在する．よって

$$(ab)^2 = abab = ab(b^{-1}a^{-1}b_1^{-1})b = b_1^{-1}b \in B$$

である．G が 1 以外に位数 2 の元を持たないならば，$ab \in B$ となってしまう．これを示そう．$x, y \in B$ に対して $x^2 = y^2$ ならば B が可換なので $xyy^{-1}y^{-1} =$ $(xy^{-1})(xy^{-1}) = 1$ である．G は 1 以外に位数 2 の元を持たないから $x = y$ である．ここで $f : B \longrightarrow B$ を $f(x) = x^2$ によって定義する．この f は定義可能な単射であることは明らか．$\mathrm{RM}(f(B)) = \mathrm{RM}(B) = 1$ かつ B の連結性から $f(B) = B$ である．しがって f は全射だから $ab \in B$ となるがこれは $a \notin B$ に反する．よって G には $x^2 = 1$ となる $x \neq 1$ が存在する．

主張 5： Borel 群は 1 つしかない．B_1, B_2 を Borel 部分群とする．$i \in B_1, j \in B_2$ をそれぞれ位数 2 の元とする．ただし i, j はどちらも 1 でない．ij を含む Borel 群を B_3 とする．$C_G(ij) = B_3$ である．

$$(ij)^i = i(ij)i^{-1} = i(ij)i = ji = j^{-1}i^{-1} = (ij)^{-1}$$

に注意すると，$i \in N_G(B_3) = B_3$ であることが分かる．よって $B_1 = B_3$ である．$B_2 = B_3$ も同様に導かれるから $B_1 = B_2$ とる．

G の Borel 群を B と書くと，B の共役が B 自身となる．すなわち B は G の正規部分群となってしまい，G の単純性に反する．あるいは，$\bigcup_{g \in G} B^g = G$ というこ

とは，$\bigcup_{g \in G} B^g$ が G 全体を覆わなければならないのに，Borel 群が 1 個しかないと，B の階数が G 全体と等しくなってしまい，$\mathrm{RM}(B) = 1$ に反する．よって G は可解群でなければならない． □

以上で G が Morley 階数 2 の連結な群ならば，可解群であることの証明を終える．中心を持たない可解群 G から代数的閉体を構成する方法を次章で解説するが，その結果を先取りすれば，G が連結な Morley 階数 2 の群でさらに非自明な中心を持たない場合，代数的閉体 K が存在して $G \simeq K \rtimes K^{\times}$ となっている．このことが後でザリスキー幾何の中で体を定義するときに本質的に使われる．

3.7 連結な 1-基底群は可換群である

6 章で解説する Hrushovski の仕事で重要な役割を果たす，1-基底群の性質を解説する．すなわち $(G, \cdot, \ldots)$ が ω-安定かつ 1-基底的な構造で $(G, \cdot)$ は群になっているとすると，G の連結成分は可換群であり，さらに任意の定義可能集合 $X \subseteq G^n$ は，有限個の定義可能部分群の有限個の剰余類の和集合になっていることを証明する．この結果は，1985 年の Logic Colloquium で発表されたが，当時数論幾何学への応用は見えていなかった．以後，この節では G を 1-基底群，$G \prec \mathbb{G}$ を万有モデルとする．

3.7.1 加群が典型例

1-基底群の典型例を見ておこう．この小節では，R は乗法の単位元 1 を持つ可換環とする．R-加群 M のモデル理論を考える．

定義 3.116 $L_R = \{+, 0, \{f_r : r \in R\}\}$ とする．各 f_r は 1 変数関数記号とする．$+$ の解釈は加群の加法である．各 f_r の M における解釈は，r 倍する演算 $f_r : m \longmapsto rm$ とする．また論理式 $\exists w(f_r(w) = y)$ を $r|y$ と書く．

加群の典型的な例は $\mathbb{Z}$-加群としての可換群と，斜体上の線形空間である．例えば $\mathbb{Z}$ を加群と考えたときの，定義可能な部分集合の構造を考えてみる．整数 x, y に対して $x \equiv y \pmod{n}$ という関係は，$n|(x-y)$ すなわち論理式 $\exists k(f_n(k) = (x-y))$ で表現できる．$\mathbb{Z}$ において n の倍数全体 $n\mathbb{Z}$ は部分群 (もちろん定義可能) である．よって $A^n_k = \{x \in \mathbb{Z} : x = k \pmod{n}\}$ とおくと A^n_k は $n\mathbb{Z}$ の剰余類である．加群としてみたとき，$\mathbb{Z}$ の定義可能集合は有限個の $n_1, \cdots, n_s$ に対する $A^{n_1}_{k_1}, \cdots, A^{n_s}_{k_s}$

の和集合になっている．つまり，有限個の定義可能部分群の有限個の剰余類の和集合になっている．

加群はつねにこのような性質を持っている．証明は Baldwin [1] の I.4, p.25-30 を参照されたい．

3.7.2 連結成分の可換性

補題 3.117 $H \leq G^n$ を連結な定義可能部分群とする．このとき $\mathrm{cb}(H) \subseteq \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\varnothing)$ である．

証明 まず $n=1$ の場合に証明すれば十分であることを示す．$n>1$ のときは，G の代わりに $G^* = (G^n, \cdot, G, \pi_1, \cdots, \pi_n, \cdots,)$ を考える．ここで，G は G^* の中で $(g, 1, \cdots, 1)$ の形をした元の集合に対応する述語記号，各 π_i は射影である．このとき G^* も 1-基底的になり，任意の $X \subseteq G^m$ は G で定義可能なことと G^* で定義可能なことが同値になる．

よって $n=1$ の場合を考える．$g \in \mathbb{G}$ を G 上の一般元，p を H の一般的タイプとする．p の解 a を $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\raisebox{0.5ex}{$\scriptstyle|$}}_G g$ であるようにとる．タイプ $\mathrm{tp}(ga/G, g)$ の $\mathbb{G}$ への非分岐拡大を q とする．このとき，

$$\mathrm{RM}(q) = \mathrm{RM}(ga/G, g) = \mathrm{RM}(a/G, g) = \mathrm{RM}(H)$$

である．α を H の 1 つの標準基底，β を q の 1 つの標準基底とする $(\alpha \in \mathrm{cb}(H))$．

主張 1： $\alpha \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\beta)$ である．

部分群 H は論理式 $\phi(v, \bar{b})$ によって定義されているとする．$\mathbb{H} = \{g \in \mathbb{G} : \mathbb{G} \models \phi(v, \bar{b})\}$ とおく．$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ に対して，$\sigma q = q$ ならば $\mathbb{H} = \sigma(\mathbb{H})$ であることを示せばよい．論理式 $\phi(g^{-1}v, \bar{b})$ はタイプ q に入っているから，論理式 $\phi(\sigma(g)^{-1}, \sigma(\bar{b}))$ は σq に入っている．仮定から $\sigma q = q$ だから，論理式 $\phi(g^{-1}v, \bar{b}) \wedge \phi(\sigma(g)^{-1}v, \sigma(\bar{b}))$ は q に入っている．ところで，論理式 $\phi(v, \sigma(\bar{b}))$ は群 $\sigma\mathbb{H}$ を定義する．よって x が q の解ならば，$x \in g\mathbb{H} \cap \sigma(g)\sigma\mathbb{H}$ である．よって $\mathrm{RM}(g\mathbb{H} \cap \sigma(g)\mathbb{H}) \geq \mathrm{RM}(q)$ である．$g\mathbb{H} \cap \sigma(g)\sigma\mathbb{H}$ は $\mathbb{H} \cap \sigma\mathbb{H}$ の剰余類なので，

$$\mathrm{RM}(q) \geq \mathrm{RM}(\mathbb{H}) \geq \mathrm{RM}(\mathbb{H} \cap \sigma\mathbb{H})\mathrm{RM}(q)$$

が成り立つ．よって $\mathbb{H} \cap \sigma\mathbb{H}$ は $\mathbb{H}$ の部分群で，指数は有限である．$\mathbb{H}$ は連結なので $\mathbb{H} \cap \sigma\mathbb{H} = \mathbb{H}$ である．よって $\mathbb{H} \subseteq \sigma\mathbb{H}$ である．同様に $\sigma\mathbb{H} \subseteq \mathbb{H}$ も示すことができ

る．よって $\sigma\mathbb{H} = \mathbb{H}$ である．したがって $\alpha \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\beta)$ である．

$\mathbb{G}$ は 1-基底的なので，$\beta \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(ga)$ である．主張 1 と組み合わせて $\alpha \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(ga)$ であることが分かる．

主張 2： $\alpha \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\varnothing} ga$ である．

a の取り方から $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{G} g$ である．対称性から $g \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{G} a$ である．g は G 上の一般元であるので ag は $G \cup \{a\}$ 上の一般元である．特に

$$\mathrm{RM}(G) \geq \mathrm{RM}(ga/\alpha) \geq \mathrm{RM}(ga/G) = \mathrm{RM}(G)$$

である．よって $\alpha \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\varnothing} ga$ である．

主張 1 と 2 から $\alpha \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\varnothing)$ である．□

よって定義可能な部分群の標準基底はすべて $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\varnothing)$ に入っていることが分かった．言語は可算なので $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(\varnothing)$ は可算集合である．よって上の補題の系として，次が成り立つ．

系 3.118　$\mathbb{G}$ が ω-安定かつ 1-基底的な群とする．定義可能な $\mathbb{G}^n$ の部分群は高々可算個しか存在しない．

最初の結果として，連結な 1-基底群の可換性が得られる．

命題 3.119　$\mathbb{G}$ の連結成分 $\mathbb{G}^\circ$ は可換群である．よって $\mathbb{G}$ は可換群 $\times$ 有限という構造をしている．

証明　$\mathbb{G}^\circ$ の任意の元 g に対して，

$$H_g = \{(x, g^{-1}xg) : x \in \mathbb{G}^\circ\} \subseteq \mathbb{G}^\circ \times \mathbb{G}^\circ$$

とおく．このとき，$H_g = H_h$ ということと $g/Z(\mathbb{G}^\circ) = h/Z(\mathbb{G}^\circ)$ (つまり $gh^{-1} \in Z(\mathbb{G}^\circ)$) ということは同値である．もし $\mathbb{G}^\circ$ が可換群でなければ $Z(\mathbb{G}^\circ)$ は $\mathbb{G}$ のなかで無限指数を持つ．各 $g \in \mathbb{G}$ に対して，H_g は $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ の定義可能部分群である．よって $|\mathbb{G}|$ 個の定義可能部分群が存在することになって上の系に反する．□

3.7.3　1-基底群の定義可能部分集合の構造

いよいよ，後の数論幾何への応用において最も重要な働きをする定理を証明する．すなわち，1-基底群の定義可能部分集合は，有限個の定義可能部分群の有限個の剰余類の和集合になっていることを証明する．

補題 3.120　$p(v) \in S_1(G)$ とする．このとき "$v \in \mathrm{Stab}(p)b$" $\in p(v)$ となるような $b \in G$ が存在する．

証明　p の標準基底に属する要素を新たな定数記号として言語に追加することによって，$\mathrm{cb}(p) = \varnothing$ と考えることにする．p はモデル G 上のタイプなので定格的であることに注意する．p の $\mathbb{G}$ への一意な非分岐拡大を p' とすると，p の固定化群を定義する論理式は p' を定義している．$\mathbb{G}$ の任意な自己同型 σ に対して $\sigma(p') = p'$ なので，σ は p' の固定化群も動かさない．よって $\mathrm{Stab}(p)$ はパラメーターなしで定義可能である．

G_1 を G の初等拡大で $|G|^+$-飽和になっているとする．$g \in G_1$ を G 上一般的な元とする．$a \in \mathbb{G}$ を $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\!|}\,_G G_1$ であるような，タイプ p の解とする．タイプ $\mathrm{tp}(ga/G_1)$ の $\mathbb{G}$ への非分岐拡大を q とおく．$g\mathrm{Stab}(p')$ の 1 つの標準基底を α，タイプ q の 1 つの標準基底を β とおく．

主張 1：α と β は互いに，一方が他方から定義可能である．

$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{G})$ とする．$\sigma(\mathrm{Stab}(p')) = \mathrm{Stab}(p')$ なので，

$$\sigma(q) = q \Longleftrightarrow \sigma(g\mathrm{Stab}(p')) = g\mathrm{Stab}(p')$$

を示せばよい．$q = gp'$ かつ $\sigma(p') = p'$ なので，

$$\sigma(q) = \sigma(g)\sigma(p') = \sigma(g)p'$$

である．また，

$$\sigma(g\mathrm{Stab}(p')) = \sigma(g)\sigma(\mathrm{Stab}(p')) = \sigma(g)\mathrm{Stab}(p')$$

にも注意すると，

$$\begin{aligned}\sigma(q) = q &\Longleftrightarrow \sigma(g)p' = gp' \\ &\Longleftrightarrow g^{-1}\sigma(g)p' = p'\end{aligned}$$

$$\iff g^{-1}\sigma(g) \in \mathrm{Stab}(p')$$
$$\iff \sigma(g)\mathrm{Stab}(p') = g\mathrm{Stab}(p')$$
$$\iff \sigma(g\mathrm{Stab}(p')) = g\mathrm{Stab}(p')$$

である．

主張 2： $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_G ga, \alpha$.

元 a は $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_G G_1$ であるようにとってきたから，

$$\mathrm{RM}(G) \geq \mathrm{RM}(ga/G) \geq \mathrm{RM}(ga/G, a) \geq \mathrm{RM}(g/G, a) \geq \mathrm{RM}(g/G)$$

が成り立つ．ところで g は G 上の一般元だから $\mathrm{RM}(g/G) = \mathrm{RM}(G)$ である．よって $\mathrm{RM}(ga/G) = \mathrm{RM}(ga/G, a)$ となり，$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_G ga$ である．G は 1-基底的なので，$\beta \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(ga)$ である．主張 1 から α と β は相互に定義可能なので，$\alpha \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(ga)$ である．よって $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_G ga, \alpha$ である．

さて p の解 $c \in G_1$ を $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_G \alpha$ であるようにとると，$c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_{G,\alpha} ga$ である．$c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_G \alpha$ なので，(独立性の) 推移性から $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_G ga, \alpha$ である．このことと主張 2 から，タイプ p の定格性に注意して $\mathrm{tp}(a/G, ga, \alpha) = \mathrm{tp}(c/G, ga, \alpha)$ であることを得る．

$ga \in g\mathrm{Stab}(p')a$ である．$g\mathrm{Stab}(p')$ は α から定義可能なので $ga \in g\mathrm{Stab}(p')c$ かつ $a \in \mathrm{Stab}(p')c$ である．

ここで，$v \in \mathrm{Stab}(p)w$ であることを表す論理式を $\phi(v, w)$ とする．タイプの定義可能性から ϕ を定義する L_G-論理式 $d_p\phi$ が存在する．$c \in G_1$ かつ $G \prec G_1$ なので $G \models d_p\phi(b)$ となる $b \in G$ が存在する．よって $v \in \mathrm{Stab}(p)w$ を表す論理式は p に入っている． □

G が 1-基底的ならば G^n も 1-基底的である．また p を G^n 上の 1-タイプと考えることができる．よって系として次が成り立つ．

系 3.121　$p \in S_n(G)$ とする．このとき "$\bar{v} \in \mathrm{Stab}(p)\bar{b}$" $\in p(\bar{v})$ であるような $\bar{b} \in G^n$ が存在する．

次に $\bar{a} \in \mathbb{G}^n$ に対して $\mathrm{tp}(\bar{a}/G)$ が何によって決定されるかを考えることにする．

系 3.122 $p, q \in S_n(G)$ とする．G^n の任意の定義可能部分群 H と任意の元 $\bar{a}$ に対して

$$\text{“}\bar{v} \in H\bar{a}\text{”} \in p \Longleftrightarrow \text{“}\bar{v} \in H\bar{a}\text{”} \in q$$

ならば，$p = q$ である．

証明 $\bar{b} \models p, \bar{c} \models q$ を $\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_G \bar{c}$ であるようにとる．$\mathrm{RM}(p) \geq \mathrm{RM}(q)$ と仮定する．$\bar{b} \models q$ を示す．上の系から，“$\bar{v} \in \mathrm{Stab}(q)\bar{a}$” $\in q(\bar{v})$ となるような $\bar{a} \in G^n$ が存在する．仮定から “$\bar{v} \in \mathrm{Stab}(q)\bar{a}$” $\in p$ である．q' を q の $\mathbb{G}$ への非分岐拡大とする．$\mathrm{Stab}(q)$ を定義する論理式は $\mathrm{Stab}(q')$ も定義している．よって $\bar{b}, \bar{c} \in \mathrm{Stab}(q')$ となるので $\bar{b}\bar{c}^{-1} \in \mathrm{Stab}(q')$ である．

主張： $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_G \bar{b}\bar{c}^{-1}$ である．

$\bar{b} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_G \bar{c}$ であるので，

$$\begin{aligned}\mathrm{RM}(\bar{b}\bar{c}^{-1}/G, \bar{c}) &= \mathrm{RM}(\bar{b}/G, \bar{c}) = \mathrm{RM}(p) \geq \mathrm{RM}(q) \\ &\geq \mathrm{RM}(\mathrm{Stab}(q)) \geq \mathrm{RM}(\bar{b}\bar{c}^{-1}/G) \geq \mathrm{RM}(\bar{b}\bar{c}^{-1}/G, \bar{c})\end{aligned}$$

となっている．よって $\mathrm{RM}(\bar{b}\bar{c}^{-1}/G, \bar{c}) = \mathrm{RM}(\bar{b}\bar{c}^{-1}/G)$ が成り立つので $\bar{c} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_G \bar{b}\bar{c}^{-1}$ である．

$\bar{d} \models q'$ とする．$\bar{b}\bar{c}^{-1} \in \mathrm{Stab}(q')$ なので，$\bar{b}\bar{c}^{-1}\bar{d} \models q'$ である．q は定格的だから $G \cup \{\bar{b}\bar{c}^{-1}\}$ への非分岐拡大 q^* は 1 つしかない．$\bar{c}$ と $\bar{d}$ はともに q^* の解である．よって $\bar{b} = \bar{b}\bar{c}^{-1}\bar{c}$ に注意すれば $\bar{b}$ が q の解になっていることが分かる．□

定理 3.123 G を ω-安定群とする．次の 2 つの性質は同値である．

(1) G は 1-基底的である．

(2) $X \subseteq G^n$ を定義可能集合とする．X は G^n の有限個の $\mathrm{acl}(\varnothing)$-定義可能部分群たちの剰余類のブール和として表される．

証明 ((1) $\Longrightarrow$ (2)) 上の系が主張していることは，$\mathrm{tp}(\bar{a}/G^n)$ は $\bar{a}$ が G^n の定義可能部分群たちのどの剰余類に入っているかという情報で決まることを意味している．

主張： 任意の定義可能集合は，G^n の有限個の $\mathrm{acl}(\varnothing)$-定義可能部分群たちの剰余類のブール和として表される．

証明はコンパクト性定理の応用である．主張が正しくないとして矛盾を導く．X を定義する $L(G)$-論理式を $\phi(\bar{v})$ とする．$\bar{c}$ を新たな定数記号とし $\Gamma(\bar{c})$ を次のように定義する．

$$\Gamma(\bar{c}) = \mathrm{Th}(G^n) \cup \{\phi(\bar{c})\} \cup \{\neg\psi(\bar{c}) : \mathrm{Th}(G^n) \vdash \forall\bar{v}(\psi(\bar{v}) \longrightarrow \phi(\bar{v}))\}$$

とおく．ただし，各 $\psi(\bar{v})$ は有限個の $\mathrm{acl}(\varnothing)$-定義可能部分群たちの剰余類のブール和を表す論理式である．$\neg\psi(\bar{v})$ もやはり同様の性質を持っていることに注意する．主張が正しくないとすると $\Gamma(\bar{c})$ は無矛盾である．G^n の初等拡大 $(G')^n$ における $\bar{c}$ の解釈を再び $\bar{c}$ で書くことにして，$\mathrm{tp}(\bar{c}/G^n)$ を考える．このタイプについては，$\bar{c}$ が G^n の定義可能部分群たちのどの剰余類に入っているかという情報だけで決まらないので，上の系に反する．

よって $\Gamma(\bar{c})$ は矛盾する．したがって $\neg\psi_1(\bar{c}), \cdots, \neg\psi_k(\bar{c}) \in \Gamma(\bar{c})$ が存在して，$\{\phi(\bar{c}), \neg\psi_1(\bar{c}), \cdots, \neg\psi_k(\bar{c})\}$ が矛盾する．よって

$$\mathrm{Th}(G^n) \vdash \forall\bar{v}(\phi(\bar{v}) \longrightarrow (\psi_1(\bar{v}) \vee \cdots \vee \psi_k(\bar{v})))$$

が成り立つ．したがって各 $\psi_i(\bar{v})$ の性質から

$$\mathrm{Th}(G^n) \vdash \forall\bar{v}(\phi(\bar{v}) \longleftrightarrow (\psi_1(\bar{v}) \vee \cdots \vee \psi_k(\bar{v})))$$

となって主張が証明された．

((2) $\Longrightarrow$ (1))　$\bar{a} \in \mathfrak{M}^n$ とし $p(\bar{v}) = \mathrm{tp}(\bar{a}/G^n)$ を考える．仮定から $p(\bar{v})$ は，$\mathrm{acl}(\varnothing)$-定義可能な G^n のそれぞれの部分群のどの剰余類に属しているかを決めれば一意に決まる．各剰余類は $\mathrm{acl}(\bar{a})$ 上定義可能であるので $\mathrm{cb}(p) \subseteq \mathrm{acl}(\bar{a})$ である．よって，補題 3.90 より G は 1-基底的である．□

4

体を再構成する

この章では，いろいろな状況下で「体を定義する」という問題を考える．行列群という具体的な群の中に体の構造を見つけることから始め，ついで可解群の中に体を定義する．その後,「群図表」と呼ばれる関係が独立性を用いて抽象的に定義されれば，体が定義されることを解説する．最後に，代数曲線族を用いて体を定義する．この方法は，後に 6 章でザリスキー幾何を用いて体を定義する方法へと発展する．

4.1　行列を使って

6 章で解説する幾何的 Mordell-Lang 予想の解決において重要な働きをするが,「体を再定義する」という問題意識はモデル理論に特有なものではない．Hilbert 第 17 問題を解決したことや，ガロア理論の古典的名著の著者としても有名な E.Artin の名著『幾何代数 (*Geometric Algebra*)』に次のような問題提起がある．

> 体から射影平面を構成するのはたやすいが，その逆，つまり射影平面から体を再構成することができるだろうか．

体の自己同型群のなかで，加法と平行移動，乗法と拡大が対応することはよく知られている．体 K が与えられると，K 上に射影平面が定義される．この射影平面はデザルグの定理を満たしている．逆にデザルグの定理を満たす射影平面 Π が与えられると，平行移動と拡大という自己同型を用いて $\mathrm{Aut}(\Pi)$ に体の構造を定義することができる．平行移動が加法に対応し，拡大が乗法に対応している．得られた体は，元の体 K と同型になっている．以下に紹介する論法は基本的には同じ考えに基づいている．**次元 2 の群が，次元 1 の集合に作用していると体ができる**というアイデアを

つかんでほしい.

K と K^* の半直積 : K を体とする. $K^* = K - \{0\}$ とおく.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} t & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in K^*, x \in K \right\} \simeq K \rtimes K^*$$

を考える. この群の基本性質を列挙する. この同型が意味するところから説明を始める. G は今回重要な働きをするので, 基本性質を書く.

(1) G は $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} : x \in K \right\}$ に 強い意味で 2-推移的に作用する. すなわち, $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2 \in X$ を任意にとると, $f \in G$ が一意的に存在して, $fa_1 = a_2$, $fb_1 = b_2$ が成り立つ.

(2) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in K \right\}$ とおくと, A は G の正規部分群である.

(3) $S = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in K^* \right\}$ とおくと, $S \leq G$.

(4) $A \cap S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ かつ $\begin{pmatrix} t & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

よって G は A と S の半直積である. $A \simeq K, S \simeq K^*$ なので G は K と K^* の半直積に同型である.

(5) $C_G(A) = A, G/C_G(A) \simeq S$.

(6) S を $\mathrm{End}(A)$ の部分群とみなすことができる.

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & tx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これより, $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が A の自己同型を引き起こすことが分かる (要するに t 倍している).

(7) A は可換なので, $\mathrm{End}(A)$ は自然に環の構造を持っている. S で生成される $\mathrm{End}(A)$ の部分環を R とおくと, R は元の体 K に同型である.

G の次元を 2，X の次元を 1 と考えることは自然である．次に，行列の掛算といくつかのパラメーターを用いて，G の中に $\langle K, +, \cdot, 0, 1\rangle$ と同型な体を再構成する．

定理 4.1 $\langle G, \cdot, *, i, j\rangle \simeq \langle K, +, \cdot, 0, 1\rangle$，ただし $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

証明 **ステップ 1：** まず，上で定義した A, S が G の中でパラメーターを用いて定義されていることを示す．

(1) A が定義可能なこと．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ということと $t = 1$ が同値になるので，

$$A = \left\{ X \in G : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X \right\}$$

よって，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ をパラメーターとして定義可能である．

(2) S が定義可能なこと．

$$\begin{pmatrix} t & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と $x = 0$ が同値であることを用いる．

ステップ 2： 行列の掛算で K の足し算を再現するのはたやすい．

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より，A での行列の掛算が K の足し算になる．

ステップ 3： ややこしいのは，K の掛算の再現である．次の等式に注意する．

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この等式を，$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^{\begin{pmatrix}a & 0\\0 & 1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}$ と書くことにする．このことは，G の中で，A の元 $\alpha = \begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}$ は，$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ と α から一意に決まる S の元 $s = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ を用いて $\alpha = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^s$ と表せることを意味する．A の他の元 β に対しても同様に t が定まる．この s, t を用いて，

$$\alpha * \beta = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^{st}$$

と定義する．ただし，α または β が $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ のときは，$\alpha * \beta = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ と定義する．このようにすると $*$ は K の掛算になる．$i = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ が足し算の単位元，すなわち K の 0，$j = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$ が掛算の単位元，すなわち K の 1 になる．　□

ここでは体から始めたが，ザリスキー幾何の場合は初めに体がある訳ではない．しかしここでの議論が出発点となっている．

4.2　群の中に体を見つける

前節では行列を用いて体を再構成したが，この節ではもうすこし一般化させて群の中に体を見つけることを考える．

定義 4.2　$(\Gamma, \cdot, 1)$ を群，S を集合とする．

(1) 写像 $\alpha : \Gamma \times S \longrightarrow S$ が，

- 任意の $s \in S$ に対して，$\alpha(1, s) = s$,

かつ

- 任意の $\gamma, \mu \in \Gamma$ と任意の $s \in S$ に対して，$\alpha(\gamma, \alpha(\mu, s)) = \alpha(\gamma\mu, s)$ を満たす

とき，α を Γ の S 上への**作用**という．混乱の恐れがないときは，$\alpha(\gamma, s)$ を単に γs と書く．

(2) $X \subseteq S$ は，任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma X = X$ であるとき，Γ-不変であるという．任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して $\gamma \in \Gamma$ が存在して $\gamma x_1 = x_2$ となっているとき，Γ の X 上への作用は**推移的**であるという．

(3) G を群とし，Γ の G への作用 $\alpha : \Gamma \times G \longrightarrow G$ を考える．任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して，

$$g \longmapsto \alpha(\gamma, g)$$

が G の自己同型となっているとき，この作用を**群自己同型作用**と呼ぶ．

(4) $(\Gamma, \cdot, S, \alpha)$ が，何かある ω-安定な構造の中に翻訳できるとき，作用 α は ω-安定であるという．また，$(\Gamma, \cdot, S, \alpha)$ が，Morley 階数有限な ω-安定な構造の中に翻訳できるとき，作用 α の Morley 階数は有限であるという．

(5) H, A を群とする．H による A 上への作用

$$\alpha : H \times A \longrightarrow A$$

は，任意の $h_1 \neq h_2 \in H$ に対して $a \in A$ が存在して $\alpha(h_1, a) \neq \alpha(h_2, a)$ となっているとき，忠実であると呼ばれる．

既約性の判定に関する補題を 1 つ証明する．

補題 4.3 Γ, G を群とする．Γ の G への作用は ω-安定で，$X \subseteq G$ は Γ-不変だとする．Γ-不変であるような G の任意な定義可能部分集合 H に対して，$|X/H| = 1$ または $|X/H|$ が無限であるとする．このとき，X は既約集合である．

証明 H を G の定義可能部分集合とし，$1 < |X/H| < \aleph_0$ と仮定する．$X \subseteq x_1 H \cup \cdots \cup x_n H$ とする．$\gamma^{-1} x \in X$ であるので，$\gamma^{-1} x = x_i h$ となる $h \in H$ が存在する．よって $x = \gamma(x_i)\gamma(h)$ と書ける．したがって，$X \subseteq \gamma(x_1)\gamma(H) \cup \cdots \cup \gamma(x_n)\gamma(H)$ が成り立つ．よって特に $X/\gamma(H)$ は有限である．

$H^* = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma H$ とおくと，ω-安定群には定義可能な部分群の無限降下列が存在しないから，$H^* = \gamma_1 H \cap \cdots \cap \gamma_m H$ となるような有限個の $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ が存在する．各 $X/\gamma_i H$ は有限なので，$X/\gamma H^*$ も有限．よって $1 < |X/\gamma H^*| < \aleph_0$ である．これ

は $\gamma H^* = H^*$ ということだから矛盾．よって X は既約集合である． □

定理 4.4　$(H,\cdot)$ と $(A,+)$ をそれぞれ無限アーベル群とする．H の A への作用 α で次の 2 つの性質を持ったものが存在すると仮定する．

- α は，ω-安定で忠実な群自己同型作用である．
- どんな定義可能無限真部分群 $B \leq A$ も H-不変でない．

このとき代数的閉体を構成することができる．

証明　A の連結成分 A° は，任意の定義可能自己同型で不変である．よって A° は，作用 α によって H-不変である．したがって仮定から $A = A^\circ$ でなければならない．つまり A は連結である．$a \in A$ を一般元とする．

主張： $Ha = \{ha \in A : h \in H\} = \{\alpha(h,a) \in A : h \in H\}$ は無限である．

もし Ha が有限ならば，$H^\circ a$ も有限である．H° は既約集合だから，$H^\circ a$ も既約集合になり，有限な既約集合は 1 点集合だから，$H^\circ a = \{a\}$ である．よって集合 $X = \{x \in A : H^\circ x = \{x\}\}$ は一般的である．したがって，A の任意の元 a に対して X の 2 元 x_1, x_2 が存在して $a = x_1 x_2$ が成り立つ．また任意の $b \in A$ に対して $H^\circ b = \{b\}$ となる．H の作用は忠実なので $H^\circ = \{1\}$ となり H 自身が有限となって仮定に反する．

主張： $Ha \cup \{0\}$ は既約である．

$Ha \cup \{0\}$ は H-既約である．よって上の補題から，H-不変な定義可能部分群に関してのみ既約性を確認すればよい．さて，B を A の H-不変な定義可能真部分群とすると，A に関する仮定から B は有限でなければならない．Ha は無限集合なので，$Ha \cup \{0\}/B$ も無限集合である．よって $Ha \cup \{0\}$ は既約である．

よって Zilber 既約性定理から，$Ha \cup \{0\}$ によって生成される A の部分群は定義可能である．またこの群は H-不変なので A 全体と一致しなければならない．Zilber 既約性定理の証明を読み返すと，ある自然数 n が存在して，A の任意の元は $Ha \cup \{0\}$ の n 個の元の和になっていることが分かる．

End(A) を加法群 $(A,+)$ の自己準同型全体からなる環とする．H が A へ作用しているので，各 $h \in H$ を，A の自己同型

$$\alpha_h : a \longmapsto ha = \alpha(h,a)$$

と同一視することによって，H を $\mathrm{End}(A)$ の部分集合とみなすことができる．

R を H によって生成される $\mathrm{End}(A)$ の部分環とする．$(H,\cdot)$ がアーベル群なので，R は可換環である．

さて b を A の任意の元とすると，$h_1,\cdots,h_m \in H$ $(m \le n)$ が存在して $b = \sum_{i=1}^{m} h_i a$ と書くことができる．よって，$r \in R$ とすると R の可換性から，

$$r(b) = \sum_{i=1}^{m} r h_i a = \sum_{i=1}^{m} h_i r(a)$$

が成り立つ．よって $r_1, r_2 \in R$ に対して $r_1(a) = r_2(a)$ ならば $r_1 = r_2$ である．

$r(a) = b$ かつ $b = \sum_{i=1}^{m} h_i a$ とすると，$h_1 + \cdots + h_m \in R$ かつ

$$r(a) = (h_1 + \cdots + h_m)(a)$$

なので $r = h_1 + \cdots + h_m$ であることが分かる．すなわち R の各元 r も $Ha \cup \{0\}$ に属する n 個の元の和として書くことができる．ここで肝心なのは，単に $r \in R$ が $Ha \cup \{0\}$ の元の和として書けるということではなく，和に現れる $Ha \cup \{0\}$ の元の個数が n で押さえられていることである．このことを利用すると，R を $Ha \cup \{0\}$ の中で翻訳することができる．

まず $(Ha \cup \{0\})^n$ に次のような同値関係を導入する．

$$(h_1,\cdots,h_n) \sim (g_1,\cdots,g_n) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} h_i a = \sum_{i=1}^{n} g_i a$$

ついで $(Ha \cup \{0\})/\sim$ に $\oplus$ と $\otimes$ を定義する．

$$\bar{h} \oplus \bar{g} = \bar{l} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} h_i a + \sum_{i=1}^{n} g_i a = \sum_{i=1}^{n} l_i a,$$

$$\bar{h} \otimes \bar{g} = \bar{l} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i g_i a = \sum_{i=1}^{n} l_i a$$

このように定義すると，R と $((Ha \cup \{0\})^n/\sim, \oplus, \otimes)$ は同型である．

次に R が体であることを示す．乗法に関する逆元の存在を示せばよい．$r \in R$ かつ $r \neq 0$ とする．$b \in B$ かつ $rb = 0$ ならば，任意の $h \in H$ に対して

$$r(hb) = (rh)b = (hr)b = h(rb) = 0$$

なので，r を準同型とみたときの核は H-不変である．A についての仮定から，準同型としての r の核は有限でなければならない．A は連結なので，r が全射であることが分かる (演習問題)．よって，$rc = a$ をみたす $c \in A$ が存在する．

$c = \sum_{i=1}^{n} h_i a$, $s = \sum_{i=1}^{n} h_i \in R$ とすると，$sa = c$ かつ $rsa = a$ が成り立つ．$1a = a$ であり，R の各元は A の元への作用によって決まるので，$rs = 1$ である．よって R は体である．

$r \longmapsto r(a)$ という対応を考えれば，R の加法群 R^+ は $(A, +)$ と同型であることが分かる．また，H を R の乗法群の部分群とみなすことができるので，H の A への作用が R の乗法に対応している．

与えられた作用の ω-安定性から R は ω-安定な構造の中に翻訳可能なので，R は ω-安定な体である．よって Macintyre の定理により R は代数的閉体である．R の標数は R^+ すなわち，$(A, +)$ によって決まる． □

さてこの定理を応用すると，可解群の中に体を翻訳することができることを示そう．まず，群が可解であることの定義を復習しておく．

定義 4.5　群 G の部分群の有限列

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots G_n = \{1\}$$

において各 G_i が G_{i-1} の正規部分群であるとき，この列を G の長さ n の正規列と呼ぶ．各商群 G_i/G_{i+1} がアーベル群であるような正規列を持つ群を，可解群と呼ぶ．

可解群は次に定義する交換子列によって特徴付けることができる．

定義 4.6　G を群とする．$G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = [G, G]$, $\cdots$, $G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$, $\cdots$ とおく．

$$[G, G] = \{[g_1, g_2] : g_1,\ g_2 \in G\}$$

を G の交換子群という．$G^{(i)}$ を G の i 次の交換子群という．列

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq \cdots G^{(i)} \supseteq \cdots$$

を G の交換子列という．

ここで交換子列に関する簡単な演習問題を 1 つ．

問題 1 群 G の交換子列 $G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq \cdots G^{(i)} \supseteq \cdots$ において，$G^{(i)}$ は $G^{(i-1)}$ の正規部分群であり，$G^{(i-1)}/G^{(i)}$ はアーベル群であることを示せ．

また，可解群に関する次の補題も群論の教科書にある標準的な補題である．

補題 4.7 (1) 群 G に対して，G が可解群であることと，$G^{(n)} = \{1\}$ を満たすような n が存在することは同値である．

(2) G が可解群ならば，G の部分群，商群も可解群である．

定理 4.8 G を，中心を持たない連結な可解群とする．さらに G は Morley 階数有限であると仮定する．このとき，G の中に代数的閉体が翻訳可能である．

証明 A を G の極小無限正規部分群とする．G が可解なので A も可解である．系 3.110 より，A の交換子群 A' は A の連結な正規真部分群でさらに定義可能である．A の極小性から $A' = \{1\}$，よって A は可換群である．A の中心化群 $C_G(A) = \{g \in G : \forall a \in A\ (ga = ag)\}$ を考える．G は中心を持たないから $Z(G) = C_G(G) = \{1\}$．よって $C_G(A) \neq G$ である．H を $G/C_G(A)$ の極小な定義可能無限部分群とする．Reinecke の定理から H は可換群である．

$g \in G, c \in C_G(A)$ とし $h = gc$ とおく．任意の $a \in A$ に対し，

$$hah^{-1} = gcac^{-1}g^{-1} = gag^{-1}$$

なので，$G/C_G(A)$，したがって H は，共役によって A に作用している．$gag^{-1} = hah^{-1}$ が任意の $a \in A$ について成り立てば，$g^{-1}hah^{-1} = a$ なので $g^{-1}h \in C_G(A)$ である．よって $g/C_G(A) = h/C_G(A)$ となり H の A への作用は忠実である．

$\hat{A}$ を G の中に翻訳可能な連結可解無限群とし，さらに Morley 階数は極小で H は $\hat{A}$ に忠実に作用しているとする．$B \leq \hat{A}$ を H-不変な極小部分群とする．

$$H_0 = \{h \in H : \forall b \in B\ (hb = b)\}$$

とおく．H の極小性から，H_0 が有限かまたは $H_0 = H$ である．

- H_0 が有限のときは，H/H_0 は B に忠実に作用しており，かつ B は 極小な H/H_0-不変部分群である．
- $H_0 = H$ のときは，H が B に作用している．よって $\hat{A}$ の取り方から，$\hat{A} = B$ である．

したがっていずれの場合にも，ある可換群 A が他の可換群 B に忠実に作用しているという状況が得られたことになる．しかも，A のどんな定義可能無限真部分群も B-不変ではない．よって定理 4.4 により代数的閉体が翻訳可能である．　□

この定理は，後にザリスキー幾何の中に代数的閉体を翻訳するときに中心的な役割を果たすことになる．行列の群，可解群といろいろな状況で体を定義してきたが，より抽象的な状況下でも体が定義できることを次に示そう．

4.3　群図表

この節では，群図表と呼ばれる図表があれば，群を定義できることを紹介する．

以後この節では，無限次元強極小集合 M を 1 つ固定して議論する．ここで，無限次元というのは M の前幾何 (M, acl) の次元が無限であるということである．

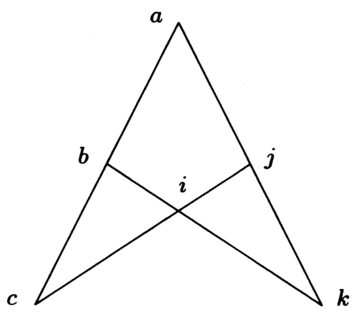


図 4.1　群図表

定義 4.9　$a, b, c, i, j, k \in M \backslash \mathrm{acl}(\varnothing)$ が次の性質を満たしているとする．

(1) どの 2 つの元も互いに独立である．

(2) 図表のなかで，各辺上にある 3 点は独立ではない．すなわち，3 点のうち，1 つは残りの 2 つの acl に入っている．

(3) 辺上の 3 点と，辺上にない点とは独立である．例えば，$a \notin \mathrm{acl}(b, i, k)$ や $k \notin \mathrm{acl}(c, i, j)$ などが成り立っている．

このとき，a, b, c, i, j, k は M の中で群図表を定義するという．

定理 4.10 M を無限次元強極小集合とする．M に群図表が現れる場合，M^{eq} の中に，∞-定義可能な無限群が存在する．

この定理を二段階に分けて証明する．すなわち，

(1) 群図表が相互定義可能性と呼ばれる性質を持つと仮定して，群を定義する．

(2) 群図表は，つねに相互定義可能性を持つ．

の順で証明する．

4.3.1 相互定義可能性を仮定して，群を定義する．

次の性質を持つ，$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \in M$ が存在すると仮定して群を定義する．

$\mathrm{acl}(\bar{a}) = \mathrm{acl}(a), \cdots, \mathrm{acl}(\bar{k}) = \mathrm{acl}(k)$ である．さらに，$\bar{j}, \bar{k}$ は $\bar{a}$ 上互に一方が他方から定義可能である．すなわち，$\bar{j} \in \mathrm{dcl}(\bar{a}, \bar{k})$ かつ $\bar{k} \in \mathrm{dcl}(\bar{a}, \bar{j})$ である．このとき $\bar{j}, \bar{k}$ は $\bar{a}$ 上**相互定義可能**であるという．

ここで重要なのは，$\bar{a}, \cdots, \bar{k}$ の間の相互関係であって，各 $\bar{a}, \cdots, \bar{k}$ の長さではない．したがって，すべてが同じ長さである必要はない．

相互定義可能性を持つ群図表から，群を定義する基本戦略はこうである．$\mathrm{tp}(\bar{j}/\varnothing)$ の解集合を J とする．J から J への定義可能な全単射全体の集合に，写像の合成を演算とする群として G を定義する．集合としての G が M^{eq} で定義可能であり，G の群演算も定義可能であることを示す．

定義 4.11 $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in M \backslash \mathrm{acl}(\varnothing)$ と $Y \subset M$ に対して，(M, acl) の中で等式，

$$\dim(\bar{a}_1\bar{a}_2/Y) = \dim(\bar{a}_1/Y) + \dim(\bar{a}_2/Y)$$

が成り立つとき，$\bar{a}_1$ と $\bar{a}_2$ は Y 上独立であるといい，

$$\bar{a}_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;\mid}_Y \bar{a}_2$$

と書く．$Y = \varnothing$ のとき，単に $\bar{a}_1$ と $\bar{a}_2$ は独立であるという．強極小集合に関しては，次元によって定義される独立性と，Morley 階数による独立性が同値であることを思い出しておこう (定理 3.35)．

以後，記述を簡単にするため，各 $\bar{a},\cdots,\bar{k}$ をそれぞれ $a,\cdots,k$ と書く．各 $\bar{a},\cdots,\bar{k}$ はそれぞれ，前幾何 (M,acl) のなかで

$$\dim(\bar{a})=\cdots=\dim(\bar{k})=1$$

を満たしていることに注意する．

定義 4.12　$a_1,\, a_2 \models \mathrm{tp}(a/\varnothing)$ かつ a_1 と a_2 は互に独立であるとする．$\mathrm{tp}(j/\varnothing)$ の解集合を J とし，$\Delta = J\backslash\mathrm{acl}(a_1,a_2)$ とおく．写像 $\mu(a_1,a_2):\Delta \longrightarrow \Delta$ を次のように定める．

- $e_1 \in \Delta$ に対して a_1 上 e_1 と相互定義可能な元を $f \models \mathrm{tp}(k/\varnothing)$ とする．
- ついでこの f に対して，a_2 上 f と相互定義可能な元を $e_2 \in J$ とする．

最後に，$\mu(a_1,a_2)(e_1)=e_2$ と定義する．

補題 4.13　$a_1,\, a_2 \models \mathrm{tp}(a/\varnothing)$ かつ a_1 と a_2 は互に独立であるとする．$e\in\Delta$ に対して，$f\models \mathrm{tp}(k/\varnothing)$ を a_1 上 e と相互定義可能な元とする．このとき a_2 と f は互に独立である．

証明　$e\notin \mathrm{acl}(a_1,a_2)$ なので，(M,acl) の交換法則から $a_2\notin\mathrm{acl}(e,a_1)$ である．$f\in\mathrm{acl}(a_1,e)$ なので，$a_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}\, a_1$ より $a_2\notin\mathrm{acl}(f)$ である．よって $a_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}\, f$ である．□

定義 4.14　$a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4 \models \mathrm{tp}(a/\varnothing)$，$a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}\, a_2$，かつ $a_3 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}\, a_4$ とする．任意の $e\models \mathrm{tp}(j/a_1,a_2,a_3,a_4)\backslash\mathrm{acl}(a_1,a_2,a_3,a_4)$ に対して

$$\mu(a_1,a_2)(e)=\mu(a_3,a_4)(e)$$

が成り立つということを $(a_1,a_2)\sim(a_3,a_4)$ と書く．

補題 4.15　(1) μ は定義可能である．すなわち，$a_1,\, a_2\models\mathrm{tp}(a/\varnothing)$ と $e_1,\, e_2 \models \mathrm{tp}(j/\varnothing)$ に対して，$a_1\notin\mathrm{acl}(a_2)$ かつ $e_1\notin\mathrm{acl}(a_1,a_2)$ であるとき $\mu(a_1,a_2)(e_1)=e_2$ であることを表現する論理式 $\sigma(x,y,z,t)$ が存在する．

(2) $H=\{(a_1,a_2) : a_1,a_2\models\mathrm{tp}(a/\varnothing),\, a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}\, a_2\}$ とおくと，上で定義した $\sim$ は H 上の定義可能な同値関係である．

証明　(1) $\mu(a_1,a_2)(e_1)=e_2$ の定義では，a_1 上 e_1 と相互定義可能な元 f を介して a_2 上 f と相互定義可能な元 e_2 を用いた．いま，a 上 e と f が相互定義可能

であることを表現する論理式を $\varphi(x,y,z)$ とすると，$\mu(a_1,a_2)(e_1)=e_2$ は論理式 $\exists z(\varphi(x,y,z)\wedge\varphi(x',y',z))$ によって定義される．

(2) まず，$(a_1,a_2)\sim(a_3,a_4)$ の定義で,「任意の $e\models\sim$」の部分を「或る $e\models\sim$ が存在して」に替えてもよいことを示す．そのために，

$$\text{或る } e\models \mathrm{tp}(j/a_1,a_2,a_3,a_4)\backslash\mathrm{acl}(a_1,a_2,a_3,a_4)$$

に対して $\mu(a_1,a_2)(e)=\mu(a_3,a_4)(e)$ が成り立っているとする．このとき，

$$\text{任意の } e\models \mathrm{tp}(j/a_1,a_2,a_3,a_4)\backslash\mathrm{acl}(a_1,a_2,a_3,a_4)$$

に対して $f\in\mathrm{Aut}(A/a_1a_2a_3a_4)$ が存在して，$f(e)=e'$ となる．したがって，$\mu(a_1,a_2)(e')=\mu(a_3,a_4)(e')$ である．よって「任意の $\sim$」を「或る $\sim$」に替えてもよい．

このことを用いて $(a_1,a_2)\sim(a_3,a_4)$ という関係の推移性を示すことができる．反射性と対称性は明らかなので，$(a_1,a_2)\sim(a_3,a_4)$ という関係は，同値関係である．

次に，この同値関係が定義可能であることを示す．$(x_1,x_2)\sim(y_1,y_2)$ ということは，各 $z\models\mathrm{tp}(j/\varnothing)$ に対して $z \downarrow x_1x_2y_1y_2$ ならば

$$\forall w\Big(\sigma(x_1,x_2,z,w)\longleftrightarrow\sigma(y_1,y_2,z,w)\Big)$$

である． この関係は,「タイプの定義可能性」を用いて，次のように論理式で表現できる．

$\mu(a_1,a_2)(e)=\mu(a_3,a_4)(e)$ を表現する論理式を $\theta(e,a_1,a_2,a_3,a_4)$ とする．$\mathrm{tp}(j/\varnothing)$ の good な $\theta(u,v_1,v_2,v_3,v_4)$-definition を $\psi(v_1,v_2,v_3,v_4)$ とする．q^* を $\mathrm{tp}(j/\varnothing)$ の $\mathrm{acl}(a_1,a_2,a_3,a_4)$ への非分岐拡大とすると，

$$(a_1,a_2)\sim(a_3,a_4)\iff\theta(u,a_1,a_2,a_3,a_4)\in q^*\iff\models\psi(a_1,a_2,a_3,a_4)$$

である． □

定義 4.16 H を同値関係 $\sim$ で割った各同値類 $(a_1,a_2)/\sim$ を，$[a_1,a_2]$ と書く．記述を簡単にするため $H/\sim$ を以後単に H と書く．各 $[a_1,a_2]$ を Δ 上の作用 $\mu(a_1,a_2)$ の芽と呼ぶ．

補題 4.17　(1) H を定義する論理式の集合が存在する．

(2) $\alpha = [a_1, a_2]$ とおくと，$j \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, a_1 a_2$ であるような $j \in \Delta$ に対して，$\mu(a_1, a_2)(j) \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\alpha, j)$ である．

証明　(1) H を定義する論理式を $H(x)$ とすると，$H(x)$ は

$$x_1, x_2 \models \mathrm{tp}(a) \text{ かつ } x_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, x_2 \text{ である } x_1, x_2 \text{ に対して } x = x_1 x_2 / \sim \qquad (*)$$

ということを論理式の集合で表現すればよい．

$a_1, a_2 \models \mathrm{tp}(a)$ かつ $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, a_2$ に対して，(a_1, a_2) に $[a_1, a_2]$ を対応させる関数を $F_\sim$ とおく．いまある $x \in \mathfrak{M}^{\mathrm{eq}}$ に対して，$F_\sim^{-1}(x) \models \mathrm{tp}(a_1, a_2)$ だとする．このとき

$$H = \{\varphi(F_\sim^{-1}(x)) : \varphi \in \mathrm{tp}(a_1, a_2)\}$$

と考えてよい．

(2) α と j を用いて，$y = \mu(a_1, a_2)(j)$ ということを論理式で表現したい．すなわち，任意の x_1, x_2 に対して

$$x_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, j,\ x_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, x_1 j \text{ かつ } \alpha = x_1 x_2 / \sim \text{ ならば } \sigma(x_1, x_2, j, y) \qquad (**)$$

ということを論理式で書き下せばよい．ここで論理式 $\sigma(v_1, v_2, v_3, v_4)$ は補題 4.15 の (1) で定義された論理式である．　□

補題 4.18　$[a_1, a_2] \in H$ とする．このとき $[a_1, a_2] \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, a_1$，$[a_1, a_2] \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, a_2$，かつ $\dim([a_1, a_2]) = 1$ である．

証明　$\alpha = [a_1, a_2]$ とおく．6 つの頂点が $a_1 b c_1 i j k$ である群図表を考える．$a_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, a_1 c_1 j$ として一般性を失わない．実際，$a_2' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, a_1'$，$a_1 a_2 \equiv a_1' a_2'$ かつ $a_2' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, a_1' c_1 j$ が成り立つように a_1', a_2' を取ることができるから，a_1, a_2 が初めから $a_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\, a_1 c_1 j$ を満たしているとしてもよい訳である．

同様に $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{bk}\, a_2$ も成り立っているとしてよい．よって，独立性の性質から，$\mathrm{acl}(bk)$ を点ごとに固定して a_1 を a_2 に移す自己同型 $g \in \mathrm{Aut}(A/\mathrm{acl}(bk))$ が存在する．$c_2 = g(c_1)$ とおく．α の定義から $\alpha(j) = g(j)$ である．まず

$$\alpha(j) \in \mathrm{acl}(c_1, c_2, j) \qquad (1)$$

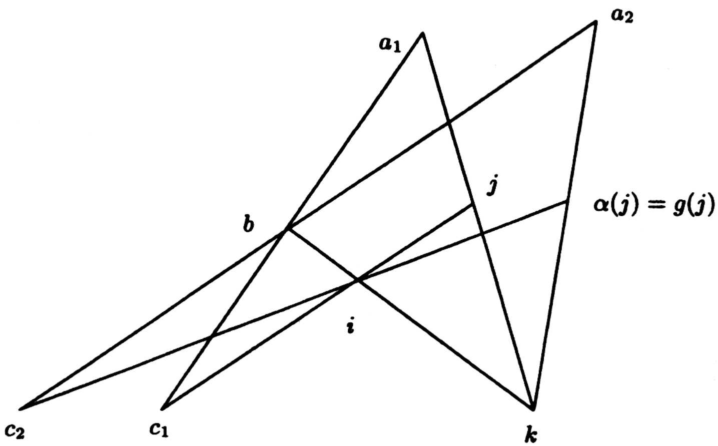


図 4.2　群図表の変型

が分かる．これは群図表の性質から，$i \in \mathrm{acl}(c_1, j)$ と $\alpha(j) \in \mathrm{acl}(c_2, i)$ が成り立っているからである．次に，

$$j \perp a_1a_2c_1c_2 \tag{2}$$

である．なぜなら，まず $a_2 \perp a_1c_1j$ から，$j \perp a_1a_2c_1$ が得られる．$\mathrm{acl}(a_1a_2c_1c_2) = \mathrm{acl}(a_1a_2c_1)$ だから $j \perp a_1a_2c_1c_2$ である．次に，

$$\alpha \in \mathrm{acl}(c_1, c_2, j) \Longrightarrow \alpha \in \mathrm{acl}(c_1, c_2) \tag{3}$$

に注意しよう．なぜなら，まず，(2) より $a_1a_2 \perp_{c_1c_2} j$ となる．定義から $\alpha \in \mathrm{acl}(a_1, a_2)$ なので $\alpha \perp_{c_1c_2} j$ となる．よって (3) が成り立つ．$\alpha \in \mathrm{acl}(c_1, c_2)$ を示すために，

$$\alpha \in \mathrm{acl}(c_1, c_2, j) \tag{4}$$

を示す．そのために，$\mathrm{Aut}(A/\mathrm{acl}(c_1, c_2, j))$ の任意の元 s をとる．$s(\alpha) = \alpha$ を示せば充分である．$j' \in \Delta$ を $j' \perp a_1a_2c_1c_2\alpha s(\alpha)$ を満たすようにとる．(2) より $j \perp a_1a_2c_1c_2$ で，j' の取り方から $j' \perp a_1a_2c_1c_2$ だから，(1) より $\alpha(j') \in \mathrm{acl}(c_1, c_2, j')$ である．α を $s(\alpha)$ に移す，$\mathrm{Aut}(A/\mathrm{acl}(c_1, c_2, j'))$ の元 t に対して，

$$\alpha(j') = t(\alpha(j')) = (t\alpha)(j') = (s\alpha)(j')$$

が成り立っている．よって α と $s(\alpha)$ は，$j' \downarrow \alpha s(\alpha)$ であるような，或る $j' \in \Delta$ に対して等しくなる．補題 4.15 (1) の証明と同様に，この「或る」は「任意の」に置き換えることができるから，$\alpha = s(\alpha)$ である．よって (4) が証明された．(4) から $\alpha \downarrow a_1$ と $\alpha \downarrow a_2$ が出てくる．

残るは，$\dim(\alpha) = 1$ の証明である．$\dim(\alpha) \leq 1$ であることが次のようにして分かる．まず $\alpha \in \mathrm{acl}(a_1, a_2) \cap \mathrm{acl}(c_1, c_2)$ に注意する．$\dim(a_1, a_2) = \dim(c_1, c_2) = 2$ なので，$\dim(\alpha) = 2$ ならば $\mathrm{acl}(a_1, a_2) = \mathrm{acl}(c_1, c_2)$ となる．そうすると，$\dim(a_1, a_2, c_1, c_2, , j) = 3$ となる．よって $a_2 \in \mathrm{acl}(a_1, c_1, j)$ となってしまうが，これは a_2 の取り方に反する．

さらに，$\dim(\alpha) \geq 1$ である．もしそうでないと，$\alpha \in \mathrm{acl}(\varnothing)$ となってしまう．よって $\alpha(j) \in \mathrm{acl}(j)$ となってしまって矛盾する．□

補題 4.19　a_1, a_2, $a_3 \models \mathrm{tp}(a/\varnothing)$ かつ a_1, a_2, a_3 は独立であるとする．このとき，$[a_1, a_2] \downarrow [a_2, a_3]$ である．

証明　$a_1 \downarrow a_2 a_3$ かつ $[a_2, a_3] \in \mathrm{acl}(a_2, a_3)$ なので，$a_1 \downarrow a_2\,[a_2, a_3]$ である．上の補題から $\dim[a_1, a_2] = \dim[a_2, a_3] = 1$ である．よってもし $[a_1, a_2] \not\downarrow [a_2, a_3]$ ならば，$\mathrm{acl}([a_1, a_2]) = \mathrm{acl}([a_2, a_3])$ である．よって $a_1 \downarrow a_2\,[a_1, a_2]$ である．一方 $\dim(a_2\,[a_1, a_2]) = 2$ なので $\dim(a_1 a_2 [a_1, a_2]) = 3$ になってしまう．しかし $\mathrm{acl}(a_1, a_2, [a_1, a_2]) = \mathrm{acl}(a_1, a_2)$ なのでこれは不可能である．□

補題 4.20　$\alpha, \beta \in H$ かつ $\alpha \downarrow \beta$ とする．このとき $\alpha = [a_1, a_2], \beta = [a_2, a_3]$ かつ $\dim(a_1, a_2, a_3) = 3$ となる a_1, a_2, a_3 が存在する．

証明　演習問題とする．□

集合 H の各元は，Δ に作用しているので，2 つの元の積を作用の合成として定義することにする．α, β を H の元とする．任意の $j' \in \Delta$ に対して，

$$j' \downarrow \alpha\beta\gamma \Longrightarrow \gamma(j') = \beta(\alpha(j'))$$

を満たす元 $\gamma \in H$ を $\alpha \cdot \beta$ と考えるのである．$\alpha \cdot \beta$ が存在することは次の補題によって保証される．

補題 4.21 (1) $\alpha, \beta \in H$ かつ $\alpha \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow} \beta$ とする．このとき $\alpha \cdot \beta$ が存在し，$\alpha \cdot \beta \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow} \alpha$ かつ $\alpha \cdot \beta \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow} \beta$ である．

(2) $\alpha \cdot \beta$ は定義可能である．すなわち論理式 $\varphi(x, y, z)$ が存在して，$\alpha, \beta \in H$ かつ $\alpha \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow} \beta$ ならば，$\alpha \cdot \beta$ は $A \models \varphi(\alpha, \beta, \alpha \cdot \beta)$ を満たす唯一の元である．

証明 上の補題から $\alpha = [a_1, a_2], \beta = [a_2, a_3]$ となる a_1, a_2, a_3 が存在する．$j' \in \Delta$ を $j' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow} a_1a_2a_3$ となるようにとる．$\mu(a_1, a_2)(j') \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow} a_2$ となっている．また，$a_3 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow} j'a_1a_2$ より $\mu(a_1, a_2)(j') \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow} a_3$ である．μ の定義から，

$$\mu(a_1, a_3)(j') = \mu(a_2, a_3)\mu(a_1, a_2)(j')$$

であることが分かる．

$\alpha \cdot \beta \in \mathrm{acl}(\alpha)$ ならば，$\mu(a_1, a_3)(j') \in \mathrm{acl}(a_1, a_2, j')$ となってしまって矛盾する．よって $\alpha \cdot \beta \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow} \alpha$ である．同様に $\alpha \cdot \beta \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow} \beta$ である．

(2) の証明は，同値関係 $\sim$ の定義可能性と同様に証明できる． □

さていよいよ求める群 G を定義する．

$$H \oplus H = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in H \text{ かつ } \alpha \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow} \beta\}$$

に次のような同値関係 $\sim^*$ を定義する．任意の $e \in \Delta$ に対して，

$$\gamma \cdot \delta(e) \text{ と } \gamma' \cdot \delta'(e) \text{ がともに定義されるならば } \gamma \cdot \delta(e) = \gamma' \cdot \delta'(e) \qquad (***)$$

が成り立つとき，$(\gamma, \delta) \sim^* (\gamma', \delta')$ と定義し，$G = H \oplus H / \sim^*$ とおく．

命題 4.22 G は ∞-定義可能である．G の演算は定義可能である．

証明 $[a_1, a_2]^{-1} = [a_2, a_1]$ なので，H は逆元に関して閉じている．よって G も逆元に関して閉じている．

G が積に関して閉じていることを示す．$(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in G$ とする．$(\alpha, \beta) \otimes (\gamma, \delta)$ を次のように定める．

(1) $\alpha \cdot \beta \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow} \gamma \cdot \delta$ のとき．$(\alpha \cdot \beta) \cdot (\gamma \cdot \delta) \in H$ だから，

$$(\alpha, \beta) \otimes (\gamma, \delta) = (\alpha \cdot \beta, \gamma \cdot \delta)$$

と定める．

(2) $\alpha \cdot \beta \not\perp \gamma \cdot \delta$ のとき．まず $\beta \perp \delta \cdot \gamma$ かつ $\alpha \perp \gamma \cdot \delta$ に注意する．なぜなら，$\dim(\delta \cdot \gamma) = 1$ だから，$\beta \not\perp \gamma \cdot \delta$ とすると，$\beta \perp \alpha \cdot \beta$ より $\dim(\gamma \cdot \delta) = 2$ となってしまうからである．$\alpha \perp \gamma \cdot \delta$ も同様にして分かる．

$\alpha = [a_1, a_2]$, $\beta = [a_2, a_3]$, $\gamma \cdot \delta = [a_3, a_4]$ とすると，$\alpha \cdot \beta = [a_1, a_3]$, $(\alpha \cdot \beta) \cdot (\gamma \cdot \delta) = [a_1, a_4]$ である．補題 4.21 より $[a_1, a_4] = \eta \cdot \eta'$ となる $(\eta, \eta') \in H \oplus H$ が存在するから，

$$(\alpha, \beta) \otimes (\gamma, \delta) = (\eta, \eta')$$

と定める．

G が ∞-定義可能であることは，補題 4.17 と同様に証明できる．また積が定義可能であることは，補題 4.21 から出てくる．□

4.3.2　相互定義可能性はつねに成り立つ

与えられた群図表を適当に変形すると常に相互定義可能性が得られることを示す．

定義 4.23　A を強極小集合，$Z = (a, b, c, i, j, k)$ を A 上の群図表とする．$Z' = (a', b', c', i', j', k')$ が

$$\mathrm{acl}(a) = \mathrm{acl}(a'),\ \mathrm{acl}(b) = \mathrm{acl}(b'),\ \cdots,\ \mathrm{acl}(k) = \mathrm{acl}(k')$$

を満たすとき，Z' を Z と**同値な群図表**と呼ぶ．

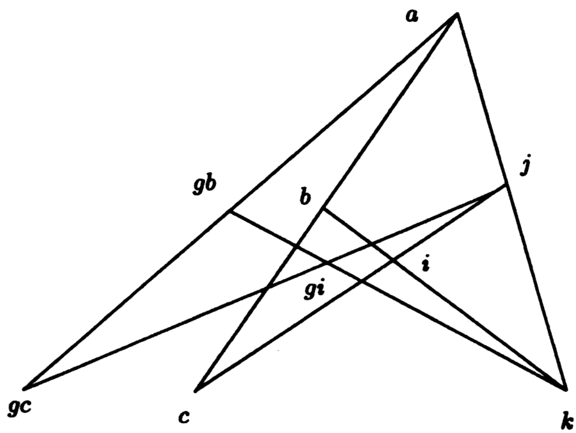
命題 4.24　A を強極小集合，Z を A 上の群図表とする．Z と同値な群図表 $Z' = (a', b, c, i, j', k')$ で，$j' \in \mathrm{dcl}(a', k')$ かつ $k \in \mathrm{acl}(k')$ であるようなものが存在する．

証明　まず $gb = g(b)$ を定数として言語に付け加えておくことにする．$\mathrm{acl}(a, k)$ の各点を固定する $g \in \mathrm{Aut}(A)$ を 1 つ考える．この g によって b は gb に動く．さて，

$$a' = a^\frown gc, \quad k' = k^\frown gi$$

とおく．$gc \in \mathrm{acl}(a)$ なので $\mathrm{acl}(a) = \mathrm{acl}(a')$ である．同様に $\mathrm{acl}(k) = \mathrm{acl}(k')$ である．また $k \in \mathrm{dcl}(k')$ は明らか．ここで $j' = \mathrm{cb}(\mathrm{tp}(j/a'k'))$ とおく．タイプの標準基底の性質から $j' \in \mathrm{dcl}(a'k')$ である． よって $\mathrm{acl}(j) = \mathrm{acl}(j')$ を示せば証明が完了する．

$e \models \mathrm{tp}(j/a'k')$ とする．



$$a' = a^\frown gc,\ k' = k^\frown gc,\ j' = \mathrm{cb}(\mathrm{tp}(j/a'k'))$$

図 4.3 g による群図表の変型

$$\mathrm{acl}(a,k) \supseteq \mathrm{acl}(j,e) \text{ かつ } \mathrm{acl}(j,e) \subseteq \mathrm{acl}(gc,gi)$$

が成り立っている．$e \in \mathrm{acl}(j)$ であること，つまり $\dim(j,e) = 1$ を示す．もしそうでなければ，$\mathrm{acl}(a,k) = \mathrm{acl}(j,e) = \mathrm{acl}(gc,gi)$ となって群図表の性質に反する．よって $\mathrm{tp}(j/a'k')$ は代数的タイプであり，$j' \in \mathrm{acl}(a',k')$ である．したがって $\mathrm{acl}(j) \supseteq \mathrm{acl}(j')$ である．

$j \in \mathrm{acl}(a',k)'$ であることを表現する論理式が存在するので，$j \in \mathrm{acl}(j')$ すなわち $\mathrm{acl}(j) \subseteq \mathrm{acl}(j')$ である． □

この補題を 2 回繰り返すことによって，次の補題が得られる．

補題 4.25 群図表 Z と同値な群図表 Z'' で，$j'' \in \mathrm{dcl}(a'',k'')$, $j'' \in \mathrm{dcl}(b'',k'')$ となるものが存在する．

最終的に，相互定義可能性をもつ群図表が次のように得られる．

定理 4.26 群図表 Z に対して，同値な群図表 Z' で

$$j \in \mathrm{dcl}(a,k'), \quad i \in \mathrm{dcl}(b,k'), \quad k' \in \mathrm{dcl}(a,j), \quad k' \in \mathrm{dcl}(b,i)$$

となっているものが存在する．

証明　上の補題における群図表 Z'' の性質を，群図表 Z がすでに持っているとする．すなわち，$j \in \mathrm{dcl}(a,k)$, $i \in \mathrm{dcl}(b,k)$, $k \in \mathrm{dcl}(k')$ が成り立っているとする．$q = \mathrm{tp}(k/abij)$ とおき，$k' = \mathrm{cb}(q)$ とする．$k \in \mathrm{acl}(a,j) \cap \mathrm{acl}(b,i)$ なので q は代数的タイプである．$\mathrm{acl}(k) = \mathrm{acl}(k')$ である．□

注意 4.27　この定理は，Hodges のモデル理論の教科書 [15], *Model Theory* (文献ノート B.1 (5)) にある定理 4.8.1 である．証明は若干書き変えてある．群図表から群を定義する議論は，それぞれ Bouscalen の群図表解説論文 [5], Pillay の教科書 (文献ノート B.1 (8)), Wagner の教科書 (同 B.1 (14)) にもあるが，すべて Hrushovski の論文 *Locally modular regular types* [16] が源である．単純理論においても，より一般化された形で群図表の理論が展開出来ることがごく最近示された*)．

4.4　強極小集合に作用する群によって定義される体

ここでは，強極小集合に作用する群 G について考える．特に G が ω-安定群になっている場合について詳しく調べる．

その前にまず前節の結果を用いて，局所モジュラーな強極小集合では無限群が定義されることを示す．

定理 4.28　M を局所モジュラーな強極小集合とする．このとき，M^{eq} に定義可能な無限群が存在する．

証明　群図表が存在することを示せばよい．

M は自明でないので，有限な $A \subset M$ と 2 点 $b, c \in M \backslash \mathrm{acl}(A)$ が存在して $c \in \mathrm{acl}(A,b) \backslash (\mathrm{acl}(A) \cup \mathrm{acl}(b))$ が成り立つようにできる．A, b, c から独立な $d \in M$ をとると，M の d での局所化 M_d はモジュラーである．d を定数記号として言語に付け加えることにより，M 自身がモジュラーであると仮定しても一般性を失わない．

d が A, b, c から独立なので $c \in \mathrm{acl}(A,b) \backslash (\mathrm{acl}(A) \cup \mathrm{acl}(b))$ という性質は失われていない．$C = \mathrm{acl}(A,b) \cap \mathrm{acl}(b,c)$ とおく．M のモジュラー性より，

---

*) Itay Ben-Yaacov, Ivan Tomasic, and Frank O. Wagner, The group configuration in simple theories and its applications, Bulletin of Symbolic Logic, vol 8, no. 2, June 2002.

$$\dim(A, b, c) = \dim(A) + \dim(b, c) - \dim(C)$$

が成り立っている．ここで，$\dim(A, b, c) = \dim(A) + 1$, $\dim(b, c) = 2$, $\dim(C) = 1$ に注意すれば，C の中に $\dim(a) = 1$ である元 a が存在する ($\dim(a) = 1$ ということは $a \notin \mathrm{acl}(\varnothing)$ ということ)．次元に関して次の等式が成り立っている．

$$\dim(a, c) = \dim(a, b) = \dim(b, c) = \dim(a, b, c) = 2$$

ここで $\mathrm{acl}(a)$ 上 (b, c) と同じタイプを持つような y, $z \in M$ をとる．さらに (y, z) と (b, c) は a 上独立であるように取ってくる．そうすると，

$$\dim(y, z/a, b, c) = \dim(y, z/a) = \dim(b, c/a) = 1$$

が成り立ち，$\dim(a, b, c, x, y) = 3$ である．(y, z) と (b, c) が a 上同じタイプを持つので，

$$\dim(a, z) = \dim(a, y) = \dim(y, z) = \dim(a, y, z) = 2$$

が成り立つ．$a \in \mathrm{acl}(b, c)$ だったので $z \in \mathrm{acl}(b, c, y)$ である．よって $\dim(b, c, y) = 3$ かつ $\dim(b, y) = 2$ である．対称性に注意するとさらに次の 2 つの等式が成り立っている．すなわち，

$$\dim(b, z) = \dim(c, y) = \dim(c, z) = 2$$

と

$$\dim(b, c, z) = \dim(b, y, z) = \dim(c, y, z) = 3$$

ここで，$X = \mathrm{acl}(c, y) \cap \mathrm{acl}(b, z)$ とおく．M のモジュラー性から

$$\dim(c, y, b, z) = \dim(c, y) + \dim(b, z) - \dim(X)$$

が成り立っているので，X の次元は 1 である．$\dim(x) = 1$ である X の元 x を 1 つ取る．そうすると，

$$\dim(c, x, y) = \dim(c, x) = \dim(c, y) = 2$$

かつ

$$\dim(b, x, z) = \dim(b, x) = \dim(b, z) = 2$$

である．よって $a, b, c, x, y, z \in \mathrm{acl}(a,u,v)$ が成り立っている．ただし，u は y または z，v は b または c とする．よって $\dim(a,u,v)=1$ である．さらに $\dim(b,x,y)=\dim(c,x,z)=3$ である．よって $\{a,b,c,x,y,z\}$ が群図表を構成している．　□

この定理はもう少し精密化することができる．

定理 4.29 (Hrushovski)　M を自明でない，局所モジュラーな強極小集合とする．このとき M^{eq} に階数 1 のアーベル群 G を定義できる．G は，M における唯一の階数 1 のタイプの解集合の自己同型群と考えることができる．

証明　前節の証明で，G は実際，階数 1 のタイプの解集合の自己同型となっている．また，強極小集合においては $\mathrm{acl}(\emptyset)$ に入らない任意の元はすべて同じタイプの解であり，このタイプの階数は 1 である．また，階数 1 の群はアーベル群である (Reinecke の定理)．　□

4.4.1　階数 2 の群が強極小集合に作用すれば体を定義する

後にザリスキー幾何の中で代数的閉体を構成するときに必要になる定理を紹介しよう．これは Hrushovski の学位論文で証明されている．問題になっているのは，ω-安定群 G が強極小集合 X に作用していて，この作用がパラメーターを用いずに定義可能であるとすると，G の構造について何が分かるかということである (より正確には，ω-安定な構造の中で G と X が定義されていて，G は定義可能な演算に関して群となっており，X は定義可能な極極小集合であるとする．さらに G の X への作用も定義可能であるとする)．

定義 4.30　G を群，X を集合とする．G の X 上への作用を考える．

(1) $|X| \geq n$ で，n 個の $x_1, \cdots, x_n \in X$ と n 個の $y_1, \cdots, y_n \in X$ に対して，$g \in G$ が存在して $gx_i = y_i$ が各 $i = 1, \cdots n$ に対して成り立つとき，G は X に n-**推移的**に作用するという．また，1-推移的な作用を単に推移的という．

(2) $x_1, \cdots, x_n$ を $y_1, \cdots, y_n$ に移す $g \in G$ が 1 つしか存在しないとき，**強い意味で** n-推移的な作用という．また強い意味で 1-推移的な作用を，**正則**な作用という．すなわち G の X への作用が正則であるというのは，任意の $x, y \in X$ に対して $gx = y$ を満たす $g \in G$ がただ 1 個存在するということである．

(3) $x \in X$ に対し，$G_x = \{g \in G : gx = x\}$ は G の部分群である．これを x の**固定群**または**固定化群**という．

(4) $x, y \in X$ に対し，ある $g \in G$ が存在して $gx = y$ が存在するということを $x \sim y$ と定義すると，$x \sim y$ は X 上の同値関係である．$x \in X$ の同値類を

$$O_G(x) = \{y \in X :\ \text{ある } g \in G \text{ が存在して } gx = y\}$$

と表し，x の**軌道**という．また $X/\sim$ の各同値類をそれぞれ軌道と呼ぶ．

G が X に作用しているとする．$x \in X$ とし，固定化群 G_x を考える．$g_1, g_2 \in G$ とすると

$$(g_1 G_x = g_2 G_x) \Longleftrightarrow (g_1 x = g_2 x)$$

である．よって G/G_x の左剰余類と x の軌道の間には 1 対 1 対応が存在する．したがって，$|G/G_x| = [G : G_x] = |O_G(x)|$ である．

群の作用に関する練習問題を 2 つあげる．はじめの問題はすでに 4.2 節で紹介したものである．

問題 2　K を体とする．$K^\times = K \backslash \{0\}$ とおく．

(1)

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} t & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in K^\times, u \in K \right\}, \quad X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} : x \in K \right\}$$

とおく．G は X に強い意味で 2-推移的に作用していることを示せ．

(2) $G = \mathrm{PGL}_2(K) = \mathrm{GL}_2(K)/Z$ とおく (Z は $\mathrm{GL}_2(K)$ の中心)．G は $G/B_2(K)$ に強い意味で 3-推移的に作用していることを示せ．ここで $B_2(K)$ は体 K 上の，正則な 2×2 上三角行列全体からなる群とする．

ω-安定群が，強極小集合 X に作用する例として，まず $\mathrm{RM}(G)$ が小さい場合の典型的な場合を 3 つ考える．

(1) G が強極小な場合．G はアーベル群なので演算を加法的に書く．G の G 自身への作用として，a を G の元とし $x \longmapsto x + a$ を考える．これは正則な作用である．

(2) $\mathrm{RM}(G) = 2$ の場合．K を代数的閉体とし，

$$G_{\mathrm{aff}} = \{x \longmapsto a + bx : a \in K,\, b \in K^{\times}\}$$

とする．このとき，G_{aff} の K への作用は，強い意味で 2-推移的であり $G \cong K \rtimes K^{\times}$ である．

(3) $\mathrm{RM}(G) = 3$ の場合．K を代数的閉体とする．$\mathbb{P}^1(K)$ を K 上の射影直線とする．K 上の 2×1 列ベクトル全体の集合 P (ただし零ベクトルは除く) を考える．$x, y \in P$ に対して，ある $\lambda \in K^{\times}$ が存在して $x = \lambda y$ となるとき $x \sim y$ と定義する．この関係は同値関係である．$\mathbb{P}^1$ を $P/\sim$ と同一視する．このとき，$g, h \in \mathrm{GL}_2(K)$ に対して

$$(\text{任意の } x \in P \text{ に対して } gx = hx) \Longleftrightarrow (\text{ある } \lambda \in K^{\times} \text{ が存在して } g = \lambda h)$$

という関係が成り立つ．$g, h \in \mathrm{GL}_2(K)$ に対して，$g = \lambda h$ となる $\lambda \in K^{\times}$ が存在するとき g と h を同一視する同値関係を考える．$\mathrm{GL}_2(K)$ をこの同値関係で割ったものを $\mathrm{PGL}_2(K)$ とする．

$\mathrm{PGL}_2(K)$ の $\mathbb{P}^1$ への作用は忠実かつ，強い意味で 3-推移的である．$\mathrm{RM}(\mathrm{PGL}_2(G)) = 3$ である．

実はこれらが基本的にすべての場合を尽くしているのである．E.Hrushovski は学位論文の中でこのことを証明した (学位論文で証明された多数の結果の 1 つ)．

定理 4.31　G をある強極小集合 X に作用している ω-安定な群とする．この作用は，定義可能であり，推移的かつ忠実であるとする．このとき次の 3 つの場合しかない (Poizat [37], p.100, Buechler [3], p.115)．

(1) $\mathrm{RM}(G) = 1$ のとき，G° の X への作用は正則である．

(2) $\mathrm{RM}(G) = 2$ のとき，X 上定義可能な体 K(代数的閉体) が存在して，G の X への作用は，$K \rtimes K^{\times}$ の K へのアフィン作用に同型であり，さらにこの同型は定義可能である．

(3) $\mathrm{RM}(G) = 3$ のとき，$X \backslash \{a\}$ (a は X のある元) 上定義可能な体 K が存在して，G の X への作用は，$\mathrm{PGL}_2(K)$ の $\mathbb{P}^1(K)$ への作用に同型である．

(4) $\mathrm{RM}(G) \leq 3$ である．

定理の証明の前に補題が 3 つ必要である．

補題 4.32 G を ω-安定無限群とし，強極小集合 X に忠実に作用しているとする．
(1) Y を有限な軌道とすると $|Y| \leq \deg(G)$ である．
(2) パラメーターを用いずに定義される有限集合 Y で，$Y \subseteq \mathrm{acl}(\varnothing) \cap X$ かつ G が $X \backslash Y$ に推移的に作用するようなものが存在する．

証明 (1) $y \in Y$ とすると，$Y = O_G(y)$ である．よって $|Y| = |O_G(y)| = [G : G_y]$ である．よって G_y は G の中で有限指数を持ち，

$$|Y| = [G : G_y] \leq [G : G^\circ] = \deg(G)$$

である．

(2) もしすべての軌道が有限ならば，各 $x \in X$ に対して $G^\circ \subseteq G_x$ となり，G が無限群であることと G が忠実に X に作用しているという仮定に反する．よって X は無限軌道を少なくとも 1 つは持つ．

仮定から G の X への作用はパラメーターを用いずに定義可能であるから，軌道は定義可能である．実際，$\varphi_G(x)$, $\psi_X(x)$, $\theta(x, y)$ をそれぞれ群 G を定義する論理式，集合 X を定義する論理式，G の X への作用を定義する論理式とすると，軌道を定義する論理式は，

$$\eta(x) := \psi_X(x) \wedge \exists g \exists y(\varphi_G(g) \wedge \psi_X(y) \wedge x = \theta(g, y))$$

である．X は強極小集合なので，X はただ 1 つの無限軌道しか持てない．この無限軌道を X_0 とおくと，X は有限個の有限軌道 $Y_1, \cdots, Y_n$ と X_0 との和集合になっている (異なる軌道は共通部分を持たない)．$Y = Y_1 \cup \cdots Y_n$ とおくと，Y はパラメーターなしで定義可能であり，$Y \subseteq \mathrm{acl}(\varnothing) \cap X$ である．X_0 は軌道なので G は $X \backslash Y$ に推移的に作用している． □

補題 4.33 可換群 G が集合 X に忠実かつ推移的に作用しているとすると，この作用は正則である．G, X がともに ω-安定な構造の定義可能部分集合である場合は，$\mathrm{RM}(G) = \mathrm{RM}(X)$ である．

証明 $x \in X$ とし $g \in G$ が $gx = x$ を満たしているとする．$y \in X$ を任意の元とする．G の作用が推移的なので $hx = y$ となる $h \in G$ が存在する．よって G が可換であることから，

$$gy = g(hx) = (gh)x = (hg)x = h(gx) = hx = y$$

である．G の作用が忠実なので，$g = 1$ である．さて $h_0 x = y$ とすると，$hh_0^{-1} = y$ なので $hh_0^{-1} = 1$，すなわち $h = h_0$ となる．よって作用は正則である．

次に，G, X がともに ω-安定な構造の定義可能部分集合であるとする．$x \in X$ をとり $g \in G$ を x 上の一般的点とする．作用の正則性から，$g \in \mathrm{dcl}(x, gx)$ である．よって

$$\mathrm{RM}(G) = \mathrm{RM}(g) = \mathrm{RM}(g/x) \leq \mathrm{RM}(gx/x) \leq \mathrm{RM}(X)$$

である．y, $z \in X$ を，$\mathrm{RM}(y) = \mathrm{RM}(z) = \mathrm{RM}(X)$ となっている互に独立な元とする．作用の推移性から $hy = z$ となる $h \in G$ が存在する．よって

$$\mathrm{RM}(X) = \mathrm{RM}(z/y) \leq \mathrm{RM}(h/y) \leq \mathrm{RM}(G)$$

となって，$\mathrm{RM}(G) = \mathrm{RM}(X)$ が成り立つ．□

補題 4.34　G を ω-安定無限群とし，極小集合 X に忠実かつ推移的に作用しているとする．N を G の定義可能な無限正規部分群とする．このとき N は X に忠実かつ推移的に作用している．

証明　G が X に忠実に作用しているから，N も X に忠実に作用している．N° が X に推移的に作用していれば N も X に推移的に作用しているのは明らかだから，$N = N^\circ$ としても一般性を失わない．

$x \in X$ とし，N による x の軌道 Nx は有限集合になっているとする．補題 4.32 (1) により，$Nx = \{x\}$ でなければならない．$y \in X$ を任意にとると，G の推移性から $gx = y$ となる $g \in G$ が存在する．N は G の正規部分群なので，

$$Ny = Ngx = gNx = \{gx\} = \{y\}$$

である．つまり，y は N の作用によって動かない．$y \in X$ は任意だったので，これは N の作用が忠実であることに反する．よって N の作用による軌道はすべて無限集合でなければならない．仮定から X は強極小集合であり，軌道は定義可能なので，X は唯一つの無限軌道しか持てない．よって N の X への作用は推移的である．□

定理 4.31 の証明, $\mathrm{RM}(G) \leq 2$ の場合の証明　**Morley 階数 1 の場合：** $\mathrm{RM}(G) = 1$ の場合，G° は強極小群である．よって Reinecke の定理により可換群である．補題 4.34 により G° の集合 X への作用は推移的である．よって補題 4.33 によりこの作用は正則である．

Morley 階数 2 の場合： $\mathrm{RM}(G) = 2$ の場合．前章の Cherlin の定理により G の既約成分 G° は可解群である．G° は G の正規部分群なので，補題 4.34 より G° は X に推移的に作用している．

もし G° が可換群だとすると，$\mathrm{RM}(G^\circ) = \mathrm{RM}(X) = 1$ となって $\mathrm{RM}(G) = \mathrm{RM}(G^\circ)$ という仮定に反する．よって G° は非可換群である．$A = (G^\circ)' = [G^\circ, G^\circ]$ とおく．Zilber 既約性定理から A は定義可能かつ連結である．G° が非可換でさらに $A \neq \{1\}$ なので，A は無限集合でなければならない．G° は可解群なので A は G° の真部分集合である．よって A は強極小部分群になっていなければならない．よって Morley 階数 1 の場合の結果から，A による X への作用は正則である．$x \in X$ を 1 つ固定する．x の固定化群 $G_x = \{g \in G : gx = g\}$ を考える．このとき，$g, h \in G$ に対して，

$$gG_x = hG_x \Longleftrightarrow gx = hx$$

である．よって，写像 $g \longmapsto gx$ は G/G_x と X の間の全単射を定義する．$\mathrm{RM}(G) = 2$ なので $\mathrm{RM}(G_x) = 1$ でなければならない．さらに以下に示すように $G_x = G_x^\circ$ なので，G_x は連結かつ強極小である．

$G_x = G_x^\circ$ であることを示そう．まず，強極小群 G_x° は 可換群であり，A に忠実に作用しているので，補題 4.33 より G_x° は A に正則に作用している．$a \in A$ とする．任意の $g \in G_x$ に対して，$h \in G_x^\circ$ が存在して，$gag^{-1} = hah^{-1}$ である．

$$S = \{f \in G_x : faf^{-1} = a \ (\forall a \in A)\}$$

とおくと，S は G_x の部分群 であり $h^{-1}g \in S$ である．よって $S = \{1\}$ を示せば，$G_x = G_x^{-1}$ が導かれる．$S = \{1\}$ を示すために $(G_x, \cdot)$ に加法 $\oplus$ を定義して $(G_x, \oplus, \cdot)$ を体にしたい．g_0, g_1, $g_2 \in G_x^{-1}$ に対して加法 $\oplus$ を

$$g_0 \oplus g_1 = g_2 \Longleftrightarrow (g_0 a g_0^{-1})(g_1 a g_1^{-1}) = g_2 a g_2^{-1} \ (\forall a \in A)$$

によって定義する．このとき $(G_x^\circ, \oplus, \cdot)$ は F と同型な体である．$s \in S$ とする．

$$\sigma : G_x^\circ \longrightarrow G_x^\circ$$
$$g \longmapsto sgs^{-1}$$

とおく．σ は群 $(G_x^\circ, \cdot)$ の自己同型である．σ が $\oplus$ を保存することは次の等式から明らかである．

$$\begin{aligned}(sg_0s^{-1}asg_0^{-1}s^{-1})(sg_1s^{-1}asg_1^{-1}s^{-1}) &= (sg_0ag_0^{-1}s^{-1})(sg_1ag_1^{-1}s^{-1}) \\ &= sg_0ag_0^{-1}g_1ag_1^{-1}s^{-1}\end{aligned}$$

よって S は 代数的閉体 $(G_x^\circ, \oplus, \cdot)$ の自己同型からなる定義可能群である．よって $S = \{1\}$ である．したがって $G_x = G_x^\circ$ となって G_x の連結性が証明された．

体を定義する： A の X への作用が正則なので，任意の $g \in G$ に対して $gx = ax$ となる $a \in A$ が唯一つ存在する．よって $g \in aG_x$ である．よって $G = A \cdot G_x$ となっている．A は G の正規部分群なので，$g \in G_x$ に対して A の自己同型 $a \longmapsto gag^{-1}$ を対応させる写像 θ は G_x から $\mathrm{Aut}(A)$ への群の準同型を定義する．この θ は 1 対 1 である．もしそうでなければ，$1 \neq g \in G_x$ が存在して，任意の $a \in A$ に対して $ga = ag$ が成り立っている．そうすると任意の $y \in X$ に対して $y = ax$ となる $a \in A$ が存在するので，

$$gy = g(ax) = (ga)x = (ag)x = a(gx) = ax = y$$

となっている．よって g は X の各元を固定している．これは G の X への作用が忠実であるという仮定に反する．したがって θ は 1 対 1 であり G_x を $\mathrm{Aut}(A)$ に埋め込んでいる．

$g \in G_x$ に対して，$\theta(g) \in \mathrm{Aut}(A)$ だから，G_x は A に作用している．この作用は $A \backslash \{1\}$ 上忠実に作用している．よって階数 1 のときの結果から，G_x° は $A \backslash \{1\}$ へ忠実かつ正則に作用している．

上で述べたように $G = A \cdot G_x$ である．$g \in G$ に対して $g = ah$ となるような $a \in A$, $h \in G_x$ を対応させる写像 $\psi : g \longmapsto (a, h)$ を考えると，$\psi : G \longrightarrow A \rtimes G_x$ は群の同型写像になっている．

A は強極小なので G_x°-不変である．$\mathrm{RM}(G_x)=1$ なので G_x° も強極小になり可換群である．よって定理 4.4 から代数的閉体 F を定義できて，$A\rtimes G_x^\circ$ を $F^+\rtimes F^\times$ に埋め込む写像 σ も定義可能である．σ を A に制限すれば A と F^+ が同型であることが分かる．よって $\mathrm{RM}(F)=1$ であり F も強極小となり，G_x° の $F^\times$ への埋め込みは全射である．

F を使うと，A と X にそれぞれ体の構造を定義することができることを次に示そう．

A に体の構造を定義する： $A\backslash\{1\}$ の任意の元を 1 つ固定し $1'$ とおく．$A\backslash\{1\}$ の任意の元を a とし，$1'$ を a に移す G_x° の元が唯一つ存在するのでそれを，a'' とする．まず A 上の 2 項演算 $\otimes$ を，

(1) $1\otimes a=a\otimes 1=a$ (任意の $a\in A$),

(2) $a\otimes b=(a''\cdot b'')1'$ $(a,\,b\in A\backslash\{1\})$.

このとき体 $(A,\cdot,\otimes,1,1')$ と体 F は同型である．

X に体の構造を定義する： A は X に正則に作用している．A の X への作用は，平行移動

$$x\longmapsto x+a\quad(a\in A)$$

に対応していて，G_x° の X への作用は，拡大

$$x\longmapsto bx\quad(b\in G_x^\circ)$$

に対応している．そして $A\rtimes G_x^\circ$ は X に，体 F のアフィン群のように作用している．

□

$\mathrm{RM}(G)>2$ の場合を証明するために，補題がさらに 2 つ必要である．G は ω-安定無限群で，強極小集合 X に推移的かつ忠実に作用している．

補題 4.35 $\mathrm{RM}(G)\geq 2,\ x\in X$ とする．このとき G_x は X の補-有限集合に忠実かつ推移的に作用している．つまり，X の有限個を除くすべての点に G_x は忠実かつ推移的に作用している．また，X の有限個を除くすべての点に G_x は推移的に作用している．

証明　G_x は G の定義可能部分群なので，G_x が無限群であることを示せば，あとは 補題 4.32 から結論が証明される．

G_x が有限群だとして矛盾を導く．任意の $y \in X$ に対して $gx = y$ となる $g \in G$ は有限個しか存在しない (ある $y \in X$ が存在して，無限個の $h \in G$ に対して $hx = y$ が成り立っているとする．G は X に推移的に作用しているので $g_y y = x$ となる g_y が存在する．$(g_y h)x = g_y(hx) = g_y y = x$ なので $g_y h \in G_x$ となって G_x が有限群であることに反する)．

g を x と $y = gx$ から独立な G の一般的点とすると，$\mathrm{RM}(g) \leq \mathrm{RM}(y/x) \leq 1$ である．これは $\mathrm{RM}(G) \geq 2$ に反する．□

補題 4.36　$\mathrm{RM}(G) \geq 2$ とする．G が，強極小集合 X に推移的かつ忠実に作用しているならば，この作用は強い意味で k-推移的である．

証明　G の Morley 階数に関する数学的帰納法で証明する．$\mathrm{RM}(G) = 2$ の場合については，定理 4.31 の証明の中で示されている．

$\mathrm{RM}(G) = k + 1 \geq 3$ とする．Morley 階数 k のどんな ω-安定群も，どんな強極小集合に対しても強い意味で k-推移的に作用すると仮定する．

$x \in X$ とし G_x° の軌道を考える．X は強極小集合なので，有限な軌道が有限個と無限な軌道が 1 つだけある．無限な軌道を Y とおく．

$X \backslash Y = \{x\}$ で G は X に $k+1$-推移的に作用していることを示す．

$X \backslash Y = Z$ とおく．Z は有限集合なので $|Z| = n$ とする．$a, b \in X$ に対して同値関係 $a \sim b$ を，等式 $G_a^\circ = G_b^\circ$ が成り立つことによって定義する．補題 4.32 より G_x° の有限軌道はどれも一点集合であるので，各 $z \in Z$ に対して $G_z \supseteq G_x^\circ$ である．一方，G は推移的に作用しているので，任意の $y, y' \in X$ に対して $\mathrm{RM}(G_y) = \mathrm{RM}(G_{y'})$ である．よって $z \in Z$ ならば $G_z^\circ = G_x^\circ$ である．つまり $X/\sim$ における x の同値類は Z 全体である．

$g \in G, a \in X$ とすると，$G_{ga} = gG_a g^{-1}$ である．よって $G_{ga}^\circ = gG_a^\circ g^{-1}$ である．よって $a, b \in X, g \in G$ に対して

$$(a \sim b) \Longleftrightarrow (ga \sim gb)$$

が成り立つ．G は X に推移的に作用しているので $X/\sim$ の有限同値類はすべて n 個の元を持つことが分かった．

よって $X\backslash Y = \{x\}$ を示すためには，$X/\sim$ の同値類がすべて一点集合であることを示せばよい．そのために，

$$(a,\, b \in Y \wedge a \neq b) \Longrightarrow a \not\sim b \tag{$*$}$$

を示す．$a, b \in Y, a \neq b$ とする．X の元と G_x の剰余類の間には定義可能な 1 対 1 対応が存在するので，$\mathrm{RM}(G/G_x) = 1$ である．一方 ω-安定群 G に対しては

$$\mathrm{RM}(G) = \mathrm{RM}(G/G_x) + \mathrm{RM}(G_x)$$

が成り立つ．よって $\mathrm{RM}(G_x) = k$ である．$\mathrm{RM}(G_x^\circ) = \mathrm{RM}(G_x) = k$ なので，帰納法の仮定から G_x° は Y に強い意味で k-推移的に作用している．よって $(G_x^\circ)_a$ は $Y\backslash\{a\}$ に強い意味で $(k-1)$-推移的に作用している．

$Y\backslash\{a\}$ の中の，異なる $k-1$ 個の元からなる列を $\bar{c}$ とおく．

$(G_x^\circ)_a$ は連結である．また $(G_x^\circ)_a \subset G_a$ なので $(G_x^\circ)_a$ は G_a° の部分集合である．

もし $a \sim b$ だとすると，$(G_x^\circ)_a \subset G_b$ である．よって $(G_x^\circ)_a$ の各元は b を動かさない．これは $(G_x^\circ)_a$ が $Y\backslash\{a\}$ に強い意味で $(k-1)$-推移的に作用しているという仮定に反する．ゆえに，$(*)$ が証明された．よって $X/\sim$ の各同値類は一点集合なので $X\backslash Y = \{x\}$ である．したがって G_x は $X\backslash\{x\}$ に推移的かつ忠実に作用している．

$\mathrm{RM}(G_x) = k$ だったので，帰納法の仮定から G_x は $X\backslash\{x\}$ に強い意味で k-推移的に作用している．$x \in X$ は任意の元だったので，G は X に強い意味で $(k+1)$-推移的に作用している． □

さて定理 4.31 の証明の中で残っているのは，$\mathrm{RM}(G) = 3$ の場合と $\mathrm{RM}(G) > 3$ とはならないということである．

Morley 階数が 3 の場合： $\mathrm{RM}(G) = 3$ とすると，上の補題から G は X に強い意味で 3-推移的に作用している．X の中の一点を固定し ∞ とおく．そうすると $\mathrm{RM}(G_\infty) = 2$ なので，G_∞ は $Y = X\backslash\{\infty\}$ に強い意味で 2-推移的に作用している．また Morley 階数 2 の場合の結果から Y 上に代数的閉体 K が定義される．体 K の加法の単位元に対応する Y の点を 0 とおくと，

$$G_{\infty,0} = \{g \in G : g\infty = \infty,\ g0 = 0\}$$

は K の乗法群と同型な強極小群である．

体 K の乗法の単位元に対応する Y の点を 1 とおくと，G は X に強い意味で 3-推移的に作用しているので $(0,1,\infty)$ を $(\infty,1,0)$ に移す元 $\alpha \in G$ が 1 つだけ存在する．α^2 は集合 $\{0,1,\infty\}$ を固定するので $\alpha^2 = 1$ でなければならない．

$g \in G_{\infty,0}$ とすると $\alpha g \alpha^{-1} \in G_{\infty,0}$ である．よって $\sigma_\alpha : g \longmapsto \alpha g \alpha^{-1}$ とおくと σ_α は $G_{\infty,0}$ の自己同型になる．以後 σ_α を単に σ と書く．このとき

(1) $\sigma \neq \mathrm{id}$,

(2) $\sigma^2 = \mathrm{id}$,

(3) 任意の $g \in G_{\infty,0}$ に対して $\sigma g = g^{-1}$ である

が成り立っていることを示す．

$a \in X \backslash \{0,1,\infty\}$ とする．$g \in G_{\infty,0}$ を $g1 = a$ となるようにとる．もし $\sigma = \mathrm{id}$ ならば，$g = \sigma(g) = \alpha g \alpha^{-1}$ なので

$$\alpha 0 = \alpha(g0) = (\alpha g) = (g\alpha)0 = g(\alpha 0) = g0 = 0$$

である．これは α の定義に反する．よって $\sigma \neq \mathrm{id}$ である．

$\alpha^2 = 1$ なので，任意の $g \in G_{\infty,0}$ に対して，

$$\sigma^2(g) = \sigma(\sigma(g)) = \alpha(\alpha g \alpha^{-1})\alpha^{-1} = g$$

となるので $\sigma^2 = \mathrm{id}$ である．

残るは σ が反転であること，すなわち任意の $g \in G_{\infty,0}$ に対して $\sigma g = g^{-1}$ であることを示すだけである．

$$B = \{g \in G_{\infty,0} : \sigma g = g\}, \quad C = \{g \in G_{\infty,1} : \sigma g = g^{-1}\}$$

とおく．B は強極小群 $G_{\infty,0}$ の定義可能真部分群なので B は有限群である．$G_{\infty,0}$ から $G_{\infty,0}$ への写像 τ を $\tau : x \longmapsto \sigma(x)x^{-1}$ によって定義する．このとき各 $g \in G_{\infty,0}$ に対して，

$$\sigma(\tau(g)) = \sigma(\sigma(g)g^{-1}) = \sigma^2(g)\sigma(g^{-1}) = g\sigma(g)^{-1} = \tau(g)^{-1}$$

である．よって τ は $G_{\infty,0}$ の元を C に移している．また，

$$\tau(g_1)=\tau(g_2)\Longrightarrow(\sigma(g_1g_2^{-1})=g_1g_2^{-1}\wedge g_1\in g_2B)$$

である．B は有限集合なので g_1 は g_2 上代数的である．よって τ の核は有限集合である．したがって C は一般点を含んでいるので $C=G_{\infty,0}$ であることが分かる．よって任意の $g\in G_{\infty,0}$ に対して $\sigma g=g^{-1}$ であり σ は反転になっている．以上で，(1), (2), (3) がすべて証明された．

さて $a\in K^{\times}$ に対して，$g\in G_{\infty,0}$ を $g1=a$ となるようにとる．$G_{\infty,0}$ は K の乗法群 $(K^{\times},\cdot)$ と同型なので，$g^{-1}1=(g1)^{-1}=a^{-1}$ である．また，$\sigma g=\alpha g\alpha^{-1}=g^{-1}$ なので $\alpha g=g^{-1}\alpha$ である．さらに $\alpha 1=1$ に注意して，

$$\alpha a=\alpha(g1)=(\alpha g)1=(g^{-1}\alpha)=g^{-1}(\alpha 1)=g^{-1}1=a^{-1}$$

を得る．よって α による作用は $K^{\times}$ の反転を引き起こしている．したがって，すべての $x\longmapsto cx+d$ と $x\longmapsto x^{-1}$ によって生成される $\mathbb{P}^1(K)$ の自己同型群が G に含まれている．よって $\mathrm{PGL}_2(K)$ が G に埋め込まれている．$\mathrm{PGL}_2(K)$ は X に 3-推移的に作用していて，G が X に強い意味で 3-推移的に作用しているので，$\mathrm{PGL}_2(K)$ の G への埋め込みは全射である．すなわち，G の X への作用は，$\mathrm{PGL}_2(K)$ の $\mathbb{P}^1(K)$ に対する作用と同型であることが分かり，$\mathrm{RM}(G)=3$ の場合の証明が完結する．いよいよ残るは $\mathrm{RM}(G)\leq 3$ の証明のみである．

G の Morley 階数は 3 以下である： $\mathrm{RM}(G)=4$ である G が強極小集合 X に忠実かつ推移的に作用しているとして矛盾を導く．補題 4.36 よりこの作用は強い意味で 4-推移的である．X の異なる 2 点 ∞_1, ∞_2 を固定する．G_{∞_1,∞_2} は $X\backslash\{\infty_1,\infty_2\}$ に強い意味で 2-推移的に作用しているので，$X\backslash\{\infty_1,\infty_2\}$ 上に代数的閉体 $(K,+,\cdot,0,1)$ が定義される．K の 0 に対応する X の元を 0 とおくと，$G_{\infty_1,\infty_2,0}$ の作用と $K^{\times}$ の $K^{\times}$ への作用，すなわち，$x\in K^{\times}$ に対して $y\longmapsto xy$ $(y\in K^{\times})$ を対応させる作用は同型である．

さて，G による作用は強い意味で 4-推移的なので，

$$\alpha_1:(0,1,\infty_1,\infty_2)\longmapsto(\infty_1,1,0,\infty_2),$$

$$\alpha_2:(0,1,\infty_1,\infty_2)\longmapsto(\infty_2,1,\infty_1,0)$$

となる α_1, α_2 が G に存在する．Morley 階数が 3 のときの証明のように，α_1, α_2 は，それぞれ共役を用いて $G_{\infty_1,\infty_2,0}$ の自己同型 σ_1, σ_2 を定義する．また，

$$\sigma_i g = g^{-1} \quad (g \in G_{\infty_1,\infty_2,0},\ i = 1,2)$$

であることが分かる．$\omega = \alpha_1\alpha_2$ とおく．このとき任意の $g \in G_{\infty_1,\infty_2,0}$ に対して $\sigma_i g = g^{-1}$，すなわち，$\alpha_i g \alpha_i^{-1} = g^{-1}$ に注意すると

$$\omega g = (\alpha_1\alpha_2)g = \alpha_1(\alpha_2 g) = \alpha_1 g^{-1}\alpha_2 = g\alpha_1\alpha_2 = g\omega$$

である．よって，$x \in K\backslash\{0,1\}$ と $g1 = x$ となる $g \in G_{\infty_1,\infty_2,0}$ に対して，$\omega 1 = \alpha_1(\alpha_2 1) = \alpha_1 1 = 1$ なので

$$\omega x = \omega(g1) = (\omega g)1 = (g\omega)1 = g(\omega 1) = g1 = x$$

が成り立つ．よって ω は $K^\times$ の元を動かさない．したがって $\omega = \mathrm{id}$ でなければならないが，これは $\omega 0 = \alpha_1\alpha_2 0 = \infty_2$ に反する．よって $\mathrm{RM}(G) = 4$ の場合はないことが分かる．

最後に，一般に ω-安定群 G が強極小集合 X に忠実かつ推移的に作用している場合

(1) $\mathrm{RM}(G)$ は有限,

(2) $\mathrm{RM}(G)$ が有限ならば $\mathrm{RM}(G) \le 3$,

が成り立つことを示す．G の作用が忠実であることから

$$\{1\} = \{g \in G : \forall x \in X(gx = x)\} = \bigcap_{x \in X}\{g \in G : gx = x\}$$

にまず注意する．ω-安定群には定義可能部分群の無限降下列が存在しないので，

$$\{1\} = \{g \in G : gx_1 = x_1, \cdots, gx_n = x_n\}$$

となる $x_1, \cdots, x_n \in X$ が存在する．写像 $g \longmapsto (gx_1, \cdots, gx_n)$ は G から X^n の中への 1 対 1 写像だから $\mathrm{RM}(G) \le \mathrm{RM}(X^n) = n$ となって $\mathrm{RM}(G)$ の有限性が示される．

$\mathrm{RM}(G)$ が有限ならば，3 以下であることを示すのは演習問題とする．これで定理 4.31 の証明は完結した．

4.4.2　Riemann 球に作用する群

ここで，Morley 階数 3 の群 G の背景になっている例を解説する．$\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球とする．Σ に作用する群として $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\{\lambda I : \lambda \neq 0\}$ を考える (ただし λ は複素数で，I は単位行列)．

このとき $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ は，Riemann 球 Σ に対して忠実かつ強い意味で 3-推移的に作用していることを証明しよう．またこの作用は 4-推移的ではない．

命題 4.37 Riemann 球 Σ の異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 に対して，

$$T(z_1)=0, \quad T(z_2)=1, \quad T(z_3)=\infty$$

を満たす $T\in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ が唯一つ存在する．

証明 z_1, z_2, z_3 のどれもが ∞ ではないとき，

$$T(z)=\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_3-z)}$$

を考えると，T は z_1, z_2, z_3 をそれぞれ 0, 1, ∞ に移している．また，$T(z)$ を Möbius 変換と考えると

$$T(z)=\frac{(z_2-z_3)z+(z_3-z_2)z_1}{(z_2-z_1)z+(z_1-z_2)z_3}$$

であり，

$$(z_2-z_3)(z_1-z_2)z_3-(z_2-z_1)(z_3-z_2)z_1=(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)$$
$$\neq 0$$

なので $T\in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ である．

z_1, z_2, z_3 のなかのどれか z_i が ∞ のときは，上で定義した $T(z)$ において $z_i \longrightarrow \infty$ として考える．すなわち，

(1) $z_1=\infty$ のときは，$T(z)=-\dfrac{(z_2-z_3)}{(z_3-z)}$,

(2) $z_2=\infty$ のときは，$T(z)=-\dfrac{(z-z_1)}{(z_3-z)}$,

(3) $z_3=\infty$ のときは，$T(z)=-\dfrac{(z-z_1)}{(z_1-z_2)}$

をそれぞれ考える．いずれの場合も $T\in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ になっていて，z_1, z_2, z_3 を $0, 1, \infty$ に移している．

$U\in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ も z_1, z_2, z_3 を 0, 1, ∞ に移しているとする．このとき UT^{-1} は 0, 1, ∞ を固定している．UT^{-1} を Möbius 変換の形

$$UT^{-1}(z)=\frac{(az+b)}{(cz+d)}$$

で書いて $z = 0, 1, \infty$ に対して $UT^{-1}(z) = z$ が成り立つことから a, b, c, d を求めると，$a = d, b = c = 0$ が分かる．$UT^{-1} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ だから $a = d = 1$ である．よって $UT^{-1} = \mathrm{id}$ より $T = U$ であることが分かる．□

この命題の系として，$(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3)$ をそれぞれ Riemann 球の異なる 3 点からなる組とすると，各 z_i を w_i $(i = 1, 2, 3)$ に移す $T \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ が 1 つだけ存在することが容易に分かる．よって $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ の Riemann 球に対する作用は，忠実かつ強い意味で 3-推移的である．忠実性を保持しつつ 4-推移的にはなりえないことは明らかである．

4.5　代数曲線族から体を再構成する

この節だけで用いる，構造の**制限**という用語の意味をまず説明しておく．

定義 4.38　$M = (M, \cdots)$ を構造とする．集合 $X \subseteq M^n$ が，パラメーターを用いた論理式で定義可能なとき，X は M で定義可能という．構造 $M_1 = (M_1, \cdots)$ を考える．集合として $M = M_1$ であり，さらに M_1 で定義可能な集合はすべて M で定義可能であるとき，M_1 を M の**制限**という．

Zilber はするどい直観にもとづき，幾何的モデル理論の分野でいろいろな予想をたててきた．代数的閉体に関わるものが多く次もその 1 つである．

(∗) 代数的閉体 F の中に翻訳可能な構造を A とする．このとき A は局所モジュラーな幾何を定義するか，あるいは F と同型な代数的閉体が A の中に翻訳可能である．

この予想に関しては次の結果が基本的である．

定理 4.39 (Martin)　f を 1 次多項式でない有理関数とすると，$(\mathbb{C}, +, f)$ で乗法が定義可能である．

定理 4.40 (Zilber, Rabinovitch)　$X \subset \mathbb{C}^2$ を直線でない，既約曲線とすると $(\mathbb{C}, +, X)$ の中で無限体が翻訳可能である．

これらの結果を一般化するのが次の定理である．

定理 4.41 (**Marker, Pillay**) $\Omega = (\mathbb{C}, +, \cdots)$ を $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ の制限とする．Ω は明らかに強極小である．(Ω, acl) は局所モジュラーでないとする．このとき，無限体が Ω の中に翻訳可能である．

よって次の定理が成り立つ．

定理 4.42 Ω が $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ の制限で，$+$ を含みかつ局所モジュラーでなければ，乗法が Ω で定義可能である．

まず $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ の制限が局所モジュラーであるとはどういうことかを確認しておこう．

$$\left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n : \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

は 線形空間 $\mathbb{C}^n$ の部分群である．この部分群を平行移動した

$$\left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n : \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\}$$

は剰余類になっている．このような剰余類を**線形多様体**と呼ぶ．線形多様体は明らかに定義可能である．逆に，複素数体 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ の理論は量記号を消去するので，$\mathbb{C}^n$ の定義可能部分群の剰余類は線形多様体である．

一般論から，強極小群 $(D, +, \cdots)$ に対しては，局所モジュラーであることと 1-基底群であることが同値なので，$(D, +, \cdots)$ が局所モジュラーであることと，D^n の任意の定義可能集合が定義可能部分群の剰余類のブール和になっていることが同値である．

ここで $M = (\mathbb{C}, +, \lambda_a)_{a \in \mathbb{C}}$ を考える (ただし各 λ_a は $\mathbb{C} \ni x \longmapsto ax$ のこと，すなわち複素数を a 倍する単項演算とする)．この M を用いて上で述べたことを整理すると，

命題 4.43 $\Omega = (\mathbb{C}, +, \cdots)$ を $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ の制限とする．Ω が局所モジュラーであることと，Ω が M の制限であることは同値である．

以後 $(\mathbb{C},+,\cdot)$ の制限 Ω を 1 つ固定する．$X, Y \subset \mathbb{C}^2$ に対して，X と Y の対称差 $(X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$ が有限集合であるとき $X \sim Y$ と書く．まず，$X \subseteq \mathbb{C}^n$ が Ω で定義可能であるとき，X の Morley 階数は Ω で計算しても $(\mathbb{C},+,\cdot)$ で計算しても同じであることに注意しよう．ただし，Morley 次数は変化するかもしれない (Morley 次数は，制限 Ω で計算したほうが定義可能集合が減っているので小さくなる可能性がある)．

補題 4.44　$X \subseteq \mathbb{C}^2$ を Ω における強極小集合とする．線形多様体 V_0，既約曲線 $V_1, \cdots, V_n$ に対して，$X \sim (V_0 \cup V_1 \cup \cdots V_n)$ ならば，$X \sim V_0$ である．

証明　適当に平行移動して V_0 が $\mathbb{C}^2$ の部分群になっていると仮定する．N を $(\mathbb{C},+,\cdot)$ の初等拡大とする．N は定義可能集合 V_0 の $\mathbb{C}$ 上の一般元 a を含むようにしておく．N を Ω の言語に制限したものを N_1 とする．このとき点 a は，N_1 において，X の $\mathbb{C}$ 上の一般元になっている．ここで，

$$S = \{c \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{tp}_{N_1}(a/\mathbb{C}) = \mathrm{tp}_{N_1}(a+c/\mathbb{C})\}$$

とおく．$V_0 \subseteq S$ なので，a は S の $\mathbb{C}$ 上の一般元である．よって $X \sim S$．したがって S は V_0 の有限個の剰余類で覆われる．S は $\mathbb{C}^2$ の可約な部分群なので，$V_0 = S$ である．　□

補題 4.45　$G \subseteq \mathbb{C}^2$ を Ω で定義可能な，強極小加法群とする．G が Ω で $\mathrm{acl}(\varnothing)$ 上定義可能でなければ，Ω の中に無限体が翻訳可能である．

証明　G は可約なので $(\mathbb{C},+,\cdot)$ の強極小集合になっている．よって，G は適当な複素数 α を用いて $G = \{(x,y) : y = \alpha x\}$ と書くことができる．ところで仮定から G は Ω の中では $\mathrm{acl}(\varnothing)$ 上定義可能でないので，Ω の中で考えると G の定義可能な共役たちは無限個存在する．それらを G_d $(d \in D)$ としよう．各 G_d は $(\mathbb{C},+,\cdot)$ の中で定義可能なので $G_d = \{(x,y) : y = \alpha_d x\}$ となっている．つまり G_d は $\mathbb{C}^2$ の中で，原点を通る直線になっている．D は無限集合なので，$(\mathbb{C},+,\cdot)$ の強極小性から，ほとんどの複素数 α に対して $d \in D$ が存在して $\alpha = \alpha_d$ となる．

これら G_d たちの族を用いて Ω の中で D 上に体の構造を導入しよう．$(\mathbb{C},+,\cdot)$ の加法に対応して D に加法を次のように定義する．$d_1, d_2 \in D$ とする．G_{d_1}, G_{d_2}

を考える.

$$\{(x, y_1 + y_2) : (x, y_1) \in G_{d_1} \wedge (x, y_2) \in G_{d_2}\}$$

は G の共役なので G_{d_3} となる $d_3 \in D$ が存在する. (d_1, d_2) にこの d_3 を対応させる演算を D の加法と定義する.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ の乗法には次のような演算が対応する. G_{d_1}, G_{d_2} に対して集合

$$\{(x, y) : \exists z((x, z) \in G_{d_1} \wedge (z, y) \in G_{d_2})\}$$

はやはり G の共役なので G_{d_3} となる $d_3 \in D$ が存在する. (d_1, d_2) にこの d_3 を対応させる演算を D の乗法と定義する. このようにして Ω の中で D のほとんど全体に体の構造を入れることができる. D のほとんど全体に体が定義されれば D 全体に拡げることができることが知られている (Weil の定理, Theorem 4.11. Pillay [34] 参照). この結果を用いると Ω の中に体が翻訳可能であることが分かる. □

準備が整ったので, Marker と Pillay の定理の証明にとりかかろう. 以後, $\Omega = (\mathbb{C}, +, \cdots)$ を $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ の制限で, 局所モジュラーではないとする. ここで 3 章で与えた, モジュラー性の性質を思い出しておこう. (M, cl) を前幾何とする. (M, cl) がモジュラーであるというのは, $\mathrm{cl}(A) = A$ であるような任意の $A \subseteq M$ と, 任意の $a \in \mathrm{cl}(b, A)$ に対して $a \in \mathrm{cl}(b, c)$ であるような $c \in A$ が存在することであった (補題 3.13).

補題 4.46 有限個の既約曲線 (それぞれ直線ではない) たちの和集合になっているような, $\mathbb{C}^2$ の部分集合 X で, Ω-定義可能集合として強極小集合になっているものが存在する.

証明 量記号消去が成り立っているので, $\mathbb{C}^2$ の任意の強極小集合 X は有限個の既約曲線と, 有限個の点の和集合になっている. したがって, もし Ω の中に, 直線ではない有限個の既約曲線たちの和集合になっているようなものがなければ, 補題 4.44 から Ω の中では, 任意の強極小集合は有限個の点を除いて線形多様体である.

さて, $\mathbb{C}^2$ のある定義可能部分群が, $\mathrm{acl}(\varnothing)$-定義可能でないとすると, 前の補題から Ω には体が翻訳できることになって証明が終わる. よって $\mathbb{C}^2$ の任意の定義可能部分群は, $\mathrm{acl}(\varnothing)$-定義可能であると仮定する. そうすると, Ω は局所モジュラー

になってしまう．なぜなら，$A \subset \mathbb{C}$ を Ω の意味で代数的に閉じた集合とし，$a, b \in \mathbb{C}\backslash A$, $b \in \mathrm{acl}_\Omega(a, A)$ とすると，上の議論から，$X \sim V$，ただし $V = G + (0, c)$ $(c \in A)$．これは，$b \in \mathrm{acl}_\Omega(a, c)$ ということである．よって Ω は局所モジュラーになって仮定に反する．

したがって直線ではない有限個の既約曲線たちの和集合になっているような，$\mathbb{C}^2$ の部分集合 X で，Ω-定義可能集合として強極小集合になっているものが存在する．□

この補題により，以後直線ではない有限個の既約曲線 C_i たちの和集合になっているような $\mathbb{C}^2$ の部分集合 X で，Ω-定義可能集合として強極小集合になっているものを 1 つ固定して議論を進める．

ここで代数曲線の復習をしておこう．$C \subset \mathbb{C}^2$ を既約多項式 $f(x, y)$ で定義された曲線とする．$a \in C$ とする．C の a における傾きを m_a とすると，

$$m_a = -\left(\left. \frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} \right|_{(x,y)=a} \right)$$

である．もちろん，曲線 C 上のすべての点で傾きが定義される訳ではない．

陰関数定理を思い出せば，次のことが分かる．すなわち，$a = (a_1, a_2)$ を C 上の点とし，$\partial f/\partial y$ は a で 0 でないとする．このとき a_1 の近傍 ($\mathbb{C}$ のユークリッド位相で) U と U で定義された解析的関数 g が存在して，$g(a_1) = a_2$ かつ任意の $t \in U$ について $(t, g(t)) \in C$ が成り立ち，さらに $m_a = g'(a)$ である．

直線でない既約曲線 C を考える．点 a が曲線 C 上を動くとき，曲線 C の点 a での傾きは，ほとんどあらゆる複素数になりうることを主張するのが次の補題である．

補題 4.47　C を直線でない既約曲線とする．このとき有限個を除くすべての複素数 α に対して，C の点 a で $m_a = \alpha$ となるものが存在する．

証明　標数が 0 で，f は一次多項式ではないので，任意の複素数 α に対して多項式 $(\partial f/\partial x) + \alpha(\partial f/\partial y)$ が恒等的に 0 となることはない．また，$f(x, y)$ は既約多項式なので，$(\partial f/\partial x) + \alpha(\partial f/\partial y)$ が $f(x, y)$ を割ることはない．したがって，$(\partial f/\partial x) + \alpha(\partial f/\partial y)$ と $f(x, y)$ の共通解は高々有限個である．すなわち，有限個を除くすべての複素数 α に対して，C の点 a で $m_a = \alpha$ となるものが存在する．□

さて $X = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ に戻ろう．各 C_i は既約多項式 $f_i(x, y)$ によって定義されているとする．

(**) 有限個を除いて X のすべての点 a は，$C_1, \cdots, C_n$ のどれか 1 つだけの曲線上にあり，$\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y}\right)_{(x,y)=a} \neq 0$

このような性質を持った X の点 a の集合を Y とおく．今後はこの Y を使って議論を展開する．まず Y の任意の点 a で m_a が定義されていることに注意しよう．要するに，今後の議論に不都合な有限個の点を X から除いた残りが Y である．

定義 4.48 $a, b \in Y$ とする．集合 X_a, Y_a と Y_a 上の演算 $\oplus, \otimes$ を次のように定義する．

(1) $X_a = \{(x, y) - a : (x, y) \in X\}$, $Y_a = \{(x, y) - a : (x, y) \in Y\}$,

(2) $Y_a \oplus Y_b = \{(x, y_1 + y_2) : (x, y_1) \in Y_a \wedge (x, y_2) \in Y_b\}$,

(3) $Y_b \otimes Y_b = \{(x, y) : \exists z((x, z) \in Y_a \wedge (z, y) \in Y_b)\}$.

これらの集合たちは次のような性質を持つ．証明は演習問題とする．

補題 4.49 $a, b \in Y$ とする．

(1) X_a, Y_a, $Y_a \oplus Y_b$, $Y_a \otimes Y_b$ はすべて点 $(0, 0)$ を通る．

(2) X_a, Y_a の点 $(0, 0)$ における傾きはそれぞれ m_a である．

(3) 0 のユークリッド位相での近傍 U と U で定義された 1 変数解析的関数 g が存在して，$\forall t \in U((t, g(t)) \in Y_a \oplus Y_b)$ かつ $g'(0) = m_a + m_b$ が成り立つ．$g(t)$ は，X_a と X_b の原点におけるそれぞれの解析的分枝 f_a, f_b を用いると，$g(t) = f_a(t) + f_b(t)$ と書ける．つまり $Y_a \oplus Y_b$ は原点 $(0, 0)$ を通る解析的分枝で，原点における傾きが $m_a + m_b$ であるようなものを持つ．

(4) $Y_a \otimes Y_b$ は原点を通る解析的分枝で傾きが $m_a \cdot m_b$ であるようなものを持つ (合成関数の微分).

(5) $Y_a \oplus Y_b$ は，任意の点 $c \in Y_a \oplus Y_b$ で解析的分枝を持つ．$Y_a \otimes Y_b$ も同様である．

補題 4.50 次のような性質を持つ自然数 N_1, N_2 が存在する．すなわち，Ω の意味で独立な一般的点 $a, b \in Y$ と有限個を除くすべての $c \in Y$ に対して，

$$|X_c \cap (Y_a \oplus Y_b)| = N_1 \text{ かつ } |X_c \cap (Y_a \otimes Y_b)| = N_2$$

である．

証明　$a, b \in Y$ を独立な一般的点とする．$Y_a \oplus Y_b$ の Morley 階数は 1 である．よって，高々有限個の $c \in Y$ に対して，$X_c \cap (Y_a \oplus Y_b)$ が無限集合である．よって有限個を除いたすべての $c \in Y$ に対して，$X_c \cap (Y_a \oplus Y_b)$ は有限集合である．Y は強極小集合なので，有限個を除くすべての $c \in Y$ に対して，$X_c \cap (Y_a \oplus Y_b)$ の要素の個数は同じでなければならない．この個数が N_1 である．N_2 も同様に得られる．N_1, N_2 は Y だけに依存して決まる自然数であって，a, b の取り方には依存しない．

□

補題 4.51　$a, b \in Y$ を独立な一般的点とする．$c \in Y$ は $m_c = m_a + m_b$ を満たしている．このとき $|X_c \cap (Y_a \oplus Y_b)|$ は，有限ならば $|X_c \cap (Y_a \oplus Y_b)| < N_1$ である．同様に，$c \in Y$ が $m_c = m_a \cdot m_b$ を満たしていて，$|X_c \cap (Y_a \otimes Y_b)|$ が有限ならば，$|X_c \cap (Y_a \otimes Y_b)| < N_2$ である．

証明　$c \in Y$ が $m_c = m_a \cdot m_b$ であり $|X_c \cap (Y_a \otimes Y_b)|$ が有限であるとしよう．$|X_c \cap (Y_a \otimes Y_b)| = N < N_2$ を示す．X_c と $Y_a \otimes Y_b$ の有限個の交点を $a^0 = (0,0), a^1, \cdots, a^{N-1}$ とおく．ユークリッド位相での各点 a^i の近傍を U_i とおく．ただし，

$$U_i \subset \mathbb{C}^2 \, (i = 0, \cdots N-1) \text{ かつ } \quad U_i \cap U_j = \varnothing \, (i \neq j)$$

と仮定する．点 c に十分近い点 $d \in Y$ で次の 2 つのことが成り立っていることを示せばよい．

(1) $|X_d \cap (Y_a \otimes Y_b) \cap U_0| \geq 2$,

(2) $|X_d \cap (Y_a \otimes Y_b) \cap U_i| \geq 1 \ (i \geq 1)$.

まず (1) を示す．$Y_a \otimes Y_b$ の $(0,0)$ における解析的分枝を $g(t)$ とする．V を 0 の近傍とする．任意の $t \in V$ に対して $g(t)$ が定義されていて $(t, g(t)) \in U_0$ とする．$c = (c_1, c_2)$ を C 上の点とする．

$$f_i(x + c_1, y + c_2) = 0$$

で定義される曲線は，X_c の $(0,0)$ を通る既約成分である．X_c と $g(t)$ の $(0,0)$ における傾きは等しい．したがって $f_i(t+c_1, g(t)+c_2)=0$ の解 $t=0$ の重複度は少なくとも 2 以上である．

$d=(d_1,d_2)\in Y$ を c の近くの点とする．X_d の $(0,0)$ における傾きは $m_a\cdot m_b$ にはなりえないので，$f_i(t+d_1, g(t)+d_2)=0$ の解 $t=0$ の重複度は 1 である．複素関数論の偏角の原理から，$c\in C_i$ に十分近い点 $d=(d_1,d_2)\in Y$ に対して，$f_i(t+d_1, g(t)+d_2)=0$ は V に別の解を持つ．よって $|X_d\cap(Y_a\otimes Y_b)\cap U_0|\geq 2$ である．

もう少し詳しく議論しよう．関数 $f_i(t+c_1,g(t)+c_2)$ を $h_c(t)$ と書く．$h_c(t)$ は V で解析的である．γ を 0 を囲む単純閉曲線とし，V の中に収まっているとする．偏角の原理から，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h_c'(t)}{h_c(t)}\,dt = \gamma \text{ で囲まれた領域における重複度も含めた } h_c(t) \text{ のゼロ点の個数}$$

である．c に十分近い点 d に対して $h_d(t)$ を定義し，同じ領域で上と同様の計算をしても積分の値は変わらない．よって同じ領域で $h_d(t)=0$ の解 $t=0$ の重複度は少なくとも 2 以上である．よって (1) が示された．

次に (2) を示す．$j\geq 1$ に対し，$a^j=(a_1^j,a_2^j)$ は X_c と $Y_a\otimes Y_b$ の交点であった．$g(t)$ を $Y_a\otimes Y_b$ の解析的分枝で a^j を通り，a_1^j のある近傍で定義されていて，すべての $t\in V$ で $(t,g(t))\in U_j$ が成り立っているとする．$f_i(t+c_1,g(t)+c_2)$ は $f_i(a_1^j+c_1, g(a_1^j)+c_2)=0$ を満たす．よって (1) の証明と同じように，c に十分近い点 $d=(d_1,d_2)$ において，$f_i(t+d_1,g(t)+d_2)=0$ は V で少なくとも 1 つ解を持つ．すなわち，c に十分近い点 d ではいつも

$$|X_d\cap(Y_a\otimes Y_b)\cap U_j|\geq 1$$

が成り立っている．

(1), (2) と Y の強極小性から，有限個を除くすべての $d\in Y$ で

$$|X_d\cap(Y_a\otimes Y_b)| > N = |X_c\cap(Y_a\otimes Y_b)|$$

が成り立つ．前補題より有限個を除くすべての $e\in Y$ で，$|X_e\cap(Y_a\otimes Y_b)|=N_2$ だから $N<N_2$ である．

同様の議論で，$m_c = m_a + m_b$ に対して，$|X_c \cap (Y_a \oplus Y_b)|$ は有限ならば N_1 未満である． □

この結果と Y の強極小性を用いると，傾きの和と積が定義可能になる．すなわち，Ω の言語の論理式 $\psi_1(x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2)$ と $\psi_2(x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2)$ が存在して，(Y の定義に用いられたパラメーターを含むかもしれない)

(1) $\models \psi_i(x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2)$ ならば $(z_1,z_2) \in \mathrm{acl}(x_1,x_2,y_1,y_2)$ $(i=1,2)$,

(2) 独立な一般点 $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2) \in Y$ と任意の $c=(c_1,c_2) \in Y$ に対して，$m_c = m_a + m_b$ ならば $\Omega \models \psi_1(a,b,c)$,

(3) 独立な一般点 $a=(a_1,a_2), b=(b_1,b_2) \in Y$ と任意の $c=(c_1,c_2) \in Y$ に対して，$m_c = m_a \cdot m_b$ ならば $\Omega \models \psi_2(a,b,c)$,

が成り立つ．

群図表を見つけることにしよう．a_1, a_2, b_1, b_2, e を Y の独立な一般点とする．つまり，Ω の言語の意味ですべて Morley 階数が 1 で，かつ独立であるとする．d, f, c_1, $c_2 \in Y$ をそれぞれ，

(1) $m_d = m_{a_1} \cdot m_e + m_{a_2}$,

(2) $m_f = m_{b_1} \cdot m_d + m_{b_2}$,

(3) $m_{c_1} = m_{b_1} \cdot m_{a_1}$,

(4) $m_{c_2} = m_{b_1} \cdot m_{a_2} + m_{b_2}$,

を満たすように定める．このように定めると，

(i)

$$\begin{aligned} m_f &= m_{b_1} \cdot m_d + m_{b_2} \\ &= m_{b_1} \cdot (m_{a_1} \cdot m_e + m_{a_2}) + m_{b_2} \\ &= (m_{b_1} \cdot m_{a_1}) \cdot m_e + (m_{b_1} \cdot m_{a_2} + m_{b_2}) \\ &= m_{c_1} \cdot m_e + m_{c_2} \end{aligned}$$

(ii) $d \in \mathrm{acl}(a_1,a_2,e)$,

(iii) $f \in \mathrm{acl}(b_1,b_2,d)$, $f \in \mathrm{acl}(c_1,c_2,e)$,

(iv) c_1, $c_2 \in \mathrm{acl}(a_1,a_2,b_1,b_2)$,

が成り立っている．これらを図表で表すと次のような群図表ができ上がる．

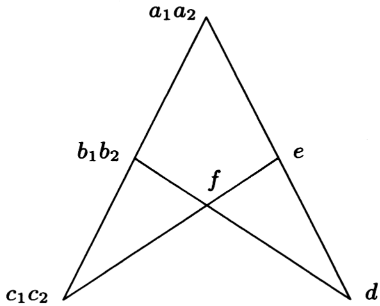


図 4.4 群図表

群図表の各頂点のモーレー階数は以下の通りである.

- $\mathrm{RM}(a_1a_2) = \mathrm{RM}(b_1b_2) = \mathrm{RM}(c_1c_2) = 2$,
- $\mathrm{RM}(e) = \mathrm{RM}(f) = \mathrm{RM}(d) = 1$,
- $\mathrm{RM}(a_1a_2b_1b_2c_1c_2) = 4$,
- $\mathrm{RM}(a_1a_2ed) = \mathrm{RM}(b_1b_2fd) = \mathrm{RM}(c_1c_2fe) = 3$,
- $\mathrm{RM}(\text{群図表全体}) = \mathrm{RM}(a_1, a_2, b_1, b_2, e) = 5$.

よって定理 4.10 と同様の議論で，階数 1 の集合に推移的かつ忠実に作用する群 G を Ω^{eq} の中に定義することができる．よって定理 4.31 により，ある代数的閉体 K が存在して G は $\mathrm{AGL}_1(K)$ と同型である．したがって K は Ω の中で翻訳可能である.

5

ザリスキー幾何

幾何的 Mordell-Lang 予想解決における Hrushovski の論法のもう 1 つの山場は，ある状況下での体の構成であった．これはザリスキー幾何という枠組みの中で行われる．このザリスキー幾何の意義を説明するために，[25] の冒頭を引用する (訳は筆者).

> k を代数的閉体とする．k^n を n-次元空間とみなす．1 個あるいは複数の n-変数多項式の解集合として代数的集合，すなわちザリスキー閉集合が定義される．代数幾何学は，これら代数的集合の振る舞いを記述する．本論文の目標は，この逆である．集合 X^n $(n = 1, 2, \cdots)$ の各々にそれぞれの部分集合たちからなる集合族が与えられ，幾何的性質を持つある種の公理を満たしているとする．このとき，集合 X は，ある代数的閉体 k 上の代数曲線と同型であり，はじめに与えられた集合族がザリスキー閉集合と一致することを示す．

つまり一見非常に抽象的な設定から始めて通常の代数幾何を再構築しようという試みである．

ザリスキー幾何の理論を作り上げたのは Hrushovski と Zilber であるが，どのような問題意識でこのようなことを考えたかを来日時のインタビュー [43] から引用する．

> — では「ザリスキー幾何学」の論文 [3] (フルショフスキーとジルバーが書いたザリスキー幾何の主論文 [25] のこと — 筆者注) を書いたとき，いずれモーデル-ラング予想を解くために使うと考えていたのですか．
>
> いいえ，ジルバーも私もそんなことは考えていませんでした．あの論文は非常に基礎的なことを論じていますから，すぐに役立つとは考えていませんでした．他の

もっと大きな枠組みを考えていました.「局所ユークリッド的位相群に解析多様体の構造を与え，リー群にすることができるか」というヒルベルトの第 5 問題にたいして，1952 年モンゴメリー-ジッペンは決定的な定理を証明しました．抽象的な位相群がリー群になる条件を求めています．当分その定理が応用されることはなさそうでしたが，グローモフは，彼らの定理を用いて，冪零群に関して美しい定理を証明しています．モンゴメリー-ジッペンの定理のような性格をもつ，基本的な問題を，ジルバーと私は論じていたのです.

このインタビューでも明確に述べられているように，ザリスキー幾何は幾何的 Mordell-Lang 予想とは切り離して考えるべきであろう．むしろ,「体とはなにか」といった非常に基礎的な問に対する 1 つの解答と考えるほうが自然かもしれない．6 章でも若干触れるが，幾何的 Mordell-Lang 予想の解決にはザリスキー幾何の理論は不要であるかもしれないことが分かってきている．少なくとも標数 0 の場合には，ザリスキー幾何の理論が不要であることが最近証明された.

ここでは,「まえがき」で予告したように,「およそ体の構造などどこを探しても見当たらないような状況下で，体を作り上げるという手品」をじっくりと堪能してほしい.

5.1 ザリスキー幾何入門

無限集合 D に対して，集合族 $(D^n : n \in \mathbb{N})$ が以下に述べる性質を持つとき，D をザリスキー幾何と呼ぶ． これらの性質はネーター位相空間の言葉で記述されるので，ネーター位相に関する一般論を簡単に復習しておく．代数幾何でおなじみのザリスキー位相は，ネーター位相になっている.

定義 5.1 • 閉集合の無限降下列が存在しない位相空間を**ネーター位相空間**と呼ぶ.

• 閉集合 F_1, F_2 に対して,

$$F = F_1 \cup F_2 \Longrightarrow F = F_1 \text{ または } F = F_2$$

が成り立つような閉集合 F を**既約閉集合**と呼ぶ.

• ネーター位相空間の任意の閉集合は，既約閉部分集合の有限個の和集合である．各既約閉部分集合を**既約成分**と呼ぶ.

• X をネーター位相空間 D の部分集合とする．次のような既約閉集合の上昇列を

考える．

$$C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n = X$$

ただし各 C_i $(i = 0, \cdots, n-1)$ は既約閉集合で，各包含関係は真の包含関係になっているとする．n の極大値を X の**次元**と呼び，$\dim(X) = n$ と書く．

- 集合 X の閉包，すなわち X を含む最小の閉集合を $\overline{X}$ と書く．
- X を既約閉集合とする．X の真部分閉集合 X_0 が存在して，$X \backslash X_0$ の各点 α で性質 P が成り立っているとき，性質 P は X で一般的に成り立つとか，X の一般点で性質 P が成り立つ，あるいは X のほとんどの点で P が成り立つという．
- 任意の開被覆が有限個の開集合からなる部分被覆をもつような部分集合を，**擬コンパクト集合**と呼ぶ．
- 点 a を含む最小の閉集合 (よって既約閉集合) を，点 a の**軌跡**という．

注意 5.2　ネーター位相空間は，閉集合の無限降下列を持たないので開集合の無限上昇列を持たない．したがって擬コンパクト集合である．しかし，Hausdorff の分離公理を満たさないので，擬コンパクト集合が閉集合であるとは限らない．

補題 5.3　X をネーター空間，$F \subseteq X$ を閉部分集合とする．F が既約でなければ，F の真部分閉集合 F_1, F_2 が存在して $(F_1 \neq \varnothing, F_2 \neq \varnothing)$,

$$F = F_1 \cup F_2, \quad F_1 = \overline{F_1^\circ}, \quad F_2 = \overline{F_2^\circ},\ F_1^\circ \cap F_2^\circ = \varnothing$$

が成り立つ．ただし集合 A に対して A° は，A に含まれる最大の開集合を表す．

証明　F は既約でないので，$F = A_1 \cup B_1$ となる，F の真部分閉集合 A_1, B_1 が存在する．$A_2 = \overline{F \backslash B_1}$ とおく．A_2 は A_1 に含まれる閉集合で，$F = A_2 \cup B_1$ が成り立っている．この A_2 に対して，$B_2 = \overline{F \backslash A_2}$ とおくと，B_2 は B_1 に含まれる閉集合で，$F = A_2 \cup B_2$ が成り立っている．このようにして，閉集合の降下列，

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots, \quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$$

を定義することができる．空間 X のネーター性から，ある自然数 n に対して，

$$A_n = A_{n+1} = \cdots, \quad B_n = B_{n+1} = \cdots$$

が成り立つ．$F_1 = A_n$, $F_2 = B_n$ とおくと，$F = F_1 \cup F_2$ かつ F_1, F_2 は F の真部分閉集合である．F_1 の定義より，F_1 には空でない真部分閉集合は存在しない．したがって $(F\backslash F_2)^\circ \subseteq F_1^\circ \subseteq F_1$ であることから，$\overline{(F\backslash F_2)^\circ} = F_1$ である．よって $\overline{F_1^\circ} = F_1$ である．同様に，$\overline{F_2^\circ} = F_2$ であることも分かる．また $F_1 = \overline{F\backslash F_2} = F\backslash F_2^\circ$ でもあるので，$F_1^\circ \cap F_2^\circ = \varnothing$ である． □

有用な性質を演習問題としておく．

問題 1　X をネーター空間とし，$F \subset A \subset X$ とする．このとき，$\dim(F) < \dim(\overline{A})$ ならば，$\overline{A\backslash F} = \overline{A}$ である．

定義 5.4 (ザリスキー幾何)　D を無限集合とし，各 n について D^n にはネーター位相が入っている．次の 4 つの公理系が満たされるとき，D は**ザリスキー幾何**であるという．

(Z0) f_i は定数写像 $f_i(x_1, \cdots x_n) = c$，あるいは射影 $f_i(x_1, \cdots x_n) = x_j$ (j は $1, \cdots, n$ のどれか) とする．$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ とすると $f : D^n \longrightarrow D^m$ は連続写像である (n, m の大小関係に制限がないことに注意)．D^n の対角集合 $\Delta_{i,j}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i = x_j\}$ は閉集合である．

(Z1) C を D^n の既約閉集合，π を D^n から D^k への射影とする．このとき，$\overline{\pi C}$ の真部分閉集合 F で，$\pi C \supseteq (\overline{\pi C} - F)$ となるものが存在する．

(Z2) D は既約である．また次の意味で，一様に 1 次元的である：$C \subseteq D^n \times D$ が閉集合であるとき，ある自然数 m が存在して，任意の $\bar{a} \in D^n$ に対して，$C(\bar{a}) = D$ または $|C(\bar{a})| \leq m$ である．ただし，$C(\bar{a}) = \{x \in D : (\bar{a}, x) \in C\}$．

(Z3)(次元定理) $\dim(D^n) \leq n$, U を D^n の既約閉集合，$T_{ij} = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i = x_j\}$ とする．このとき $U \cap T_{ij}$ の各成分の次元は，$\dim(U) - 1$ 以上である．

定義 5.5　閉集合 $C \subseteq D^m$ と射影 $\pi : D^m \longrightarrow D^n$ に対して $\pi(C) \subseteq D^n$ が閉集合になっているとき，D を**完備**なザリスキー幾何という．

ザリスキー幾何 D が完備な場合，公理 (Z1) は明らかに成り立っている．

一方モデル理論的観点から言えば，公理 (Z1) は，ザリスキー幾何 D にたいしてその理論 $\mathrm{Th}(D)$ が量記号を消去すること，すなわち論理式には $\forall$, $\exists$ が現れないと仮定してよいことを保証している．このことを代数の言葉で言いかえると，「構成可能集合の射

影は構成可能である」という Chevalley の定理と同値である（"*Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties*", D.Mumford, Springer 1976, Proposition 2.31, p.37 参照）．公理 (Z2) は，ザリスキー幾何 D が強極小集合になっていることを保証している．与えられた集合がザリスキー幾何になるかどうかを確かめるとき次元定理が重要な決め手となる．

簡単な性質をいくつか確認しておこう．以後この節では，D はザリスキー幾何とする．

命題 5.6　公理 (Z0) によって，ザリスキー幾何による位相が積位相の細分になっていることが分かる．特に，一点だけからなる集合，一点集合は閉集合である．

証明　$\pi_1 : D^{m+n} \longrightarrow D^m$ を D^m 成分への射影，$\pi_2 : D^{m+n} \longrightarrow D^n$ を D^n 成分への射影とする．公理 (Z0) より，π_1, π_2 はともに連続写像である．$C_1 \subseteq D^m$, $C_2 \subseteq D^n$ をそれぞれ閉集合とする．$C_1 \times D^n = \pi_1^{-1}(C_1)$, $D^m \times C_2 = \pi_2(C_2)$ なので，$C_1 \times D^n$, $D^m \times C_2$ はともに D^{m+n} の閉集合である．よって $C_1 \times C_2 = (C_1 \times D^n) \cap (D^m \times C_2)$ より $C_1 \times C_2$ は閉集合である．

公理 (Z0) の役割として，このような閉集合以外にも D^{m+n} に閉集合が存在することを保障することがある．このことは，次のようにして分かる．

閉集合 $C \subseteq D^n \times D^m$ と $\bar{a} \in D^n$ を考える．写像 $f : D^m \longrightarrow D^{n+m}$ を $\bar{x} \in D^m$ に対して，$f(\bar{x}) = (\bar{a}, \bar{x})$ によって定義する．公理 (Z0) により f は連続写像である．さて，$C(\bar{a}) = \{\bar{x} : (\bar{a}, \bar{x}) \in C\}$ とおくと $C(\bar{a}) = f^{-1}(C)$ なので，$C(\bar{a}) \subseteq D^m$ は閉集合である．

$a \in D$ とする．$x \in D$ に $(a, x) \in D^2$ を対応させる写像 g は公理 (Z0) により連続写像である．$\Delta^2_{1,2}$ は D^2 の閉集合なので，$\{a\} = g^{-1}(\Delta^2_{1,2})$ は閉集合である．すなわち D の各一点集合は閉集合である．よって D^n の一点集合も閉集合である．□

命題 5.7　各正整数 n に対して D^n は既約である．

証明　公理 (Z2) から D は既約である．

D^k が既約ならば D^{k+1} も既約であることを次に示そう．いま D^{k+1} が 2 つの閉集合 $F_1, F_2 \subseteq D^{k+1}$ の和集合になっているとしよう．$i = 1, 2$ に対して

$$F_i^* = \{\bar{a} \in D^k : (\forall x \in D)((\bar{a}, x) \in F_i)\}$$

とおく．$F_i^* = \bigcap_{x \in D} F_i(x)$ であり，各 $F_i(x) = \{\bar{a} \in D^k : (\bar{a}, x) \in F_i\}$ は閉集合である．なぜなら，写像 $\pi_x : D^k \longrightarrow D^{k+1}$ を $\bar{y} \longmapsto (\bar{y}, x)$ によって定義すれば π_x は連続で $F_i(x) = \pi_x^{-1}(F_i)$ だからである．よって，F_i^* は閉集合である．

さて，各 $\bar{a} \in D^k$ に対して，$F_i(\bar{a}) = \{x \in D : (\bar{a}, x) \in F_i\}$ は閉集合であり $D = F_1(\bar{a}) \cup F_2(\bar{a})$ なので，D の既約性から $D = F_1(\bar{a})$ または $D = F_2(\bar{a})$ である．したがって $D^k = F_1^* \cup F_2^*$ になっていることが分かる．帰納法の仮定から D^k は既約なので，$D^k = F_1^*$ または $D^k = F_2^*$ である．$D^k = F_1^*$ のときは $D^{k+1} = F_1$ になり，$D^k = F_2^*$ のときは $D^{k+1} = F_2$ になる．いずれにせよ D^{k+1} は既約である．□

定理 5.8 各 n に対して，D^n の次元は n である．

証明 公理 (Z3) により $\dim(D^n) \leq n$ なので，$\dim(D^n) \geq n$ を示せばよい．D^n の中に，$D, D^2, \cdots, D^{n-1}$ と同相な既約閉集合が存在するので，D^n の次元が少なくとも n であることが分かる．□

命題 5.9 $\pi : D^n \longrightarrow D^k$ を射影とする．閉集合 $C \subseteq D^n$ にたいして $F = \overline{\pi(C)}$ とおく．

(1) C が既約ならば，F も既約である．

(2) F が既約ならば，C のある既約成分 C' に対して $F = \overline{\pi(C')}$ となっている．

証明 (1) F が閉集合 F_1, F_2 の和集合になっているとしよう．$\pi^{-1}(F_1)$ と $\pi^{-1}(F_2)$ はともに閉集合であり，$C = \pi^{-1}(F_1) \cup \pi^{-1}(F_2)$ なので，C の既約性から $C = \pi^{-1}(F_1)$ または $C = \pi^{-1}(F_2)$ である．

$C = \pi^{-1}(F_1)$ の場合を考える．このときは，$F = \overline{\pi(\pi^{-1}(F_1))} = \overline{F_1} = F_1$．$C = \pi^{-1}(F_2)$ の場合は $F = F_2$ となる．よって F は既約である．

(2) C が閉集合 C_1, C_2 の和集合になっているとする．このとき $F = \overline{\pi(C)} = \overline{\pi(C_1)} \cup \overline{\pi(C_2)}$ が成り立つので，F の既約性から $F = \overline{C_1}$ または $F = \overline{C_2}$ である．ネーター位相の一般論から，任意の閉集合は有限個の既約成分の和集合になっているので F が既約な場合 C のある既約成分 C' に対して $F = \overline{\pi(C')}$ が成り立つ．□

命題 5.10 $E \subseteq D^n$ とし，$C \subseteq E \times D$ を D^{n+1} の閉集合とする．ある $\bar{a} \in E$ に対して $C(\bar{a})$ が有限集合ならば，E のほとんどすべての $\bar{a}$ に対して $C(\bar{a})$ は有限

集合である．ここで E のほとんどすべての点 $\bar{a}$ に対してというのは，D^n のある閉集合 E_0 が存在して $E\backslash E_0$ のすべての点に対して結論が成り立つということである．

証明　公理 (Z2) より，もし $C(\bar{a})$ が無限集合ならば $C(\bar{a}) = D$ である．各 $d \in D$ に対して，写像 $\pi_d : D^n \longrightarrow D^{n+1}$ を

$$\pi_d : (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto (x_1, \cdots, x_n, d)$$

によって定義する．公理 (Z0) により π_d は連続写像である．よって $\pi_d^{-1}(C) = \{\bar{a} \in D^n : (\bar{a}, d) \in C\}$ は閉集合である．$\{\bar{a} \in D^n : C(\bar{a}) = D\} = \bigcap_{d \in D} \pi_d^{-1}(C)$ なので，$E_0 = \{\bar{a} \in D^n : C(\bar{a}) = D\}$ とおけば，E_0 は閉集合で，E_0 に対して結論が成り立つ．　□

命題 5.11 (次元定理)　$C_1, C_2 \subseteq D^n$ を異なる既約閉集合で，$\dim(C_i) = d_i$ $(i = 1, 2)$ とする．$C_1 \cap C_2$ が空集合でなければ，$C_1 \cap C_2$ の各既約成分の次元は少なくとも $d_1 + d_2 - n$ 以上である．

証明　D^3 における状況を見てみよう．C_1, C_2 としてそれぞれ 2 次元曲面を考える．C_1 と C_2 が交われば，$C_1 \cap C_2$ の連結成分の次元は少なくとも $2 + 2 - 3 = 1$ であることを主張している．つまり 2 次元曲面が交われば，すくなくともそこには 1 次元集合，すなわち曲線が現れることを主張している．

D^{2n} の中の対角集合 $\Delta_i = \Delta^{2n}_{i,n+i}$ は公理 (Z0) により閉集合である．$\Delta = \bigcap_{i=1}^{n} \Delta_i$ はよって D^{2n} の閉集合である．

写像 $f : D^n \longrightarrow D^{2n}$ を $(x_1, \cdots x_n) \longmapsto (x_1, \cdots x_n, x_1, \cdots, x_n)$ によって定義すると，f は連続写像である．この f を $C_1 \cap C_2$ に制限すると $C_1 \cap C_2$ と $(C_1 \times C_2) \cap \Delta$ の間の同相写像になっている．

C_1, C_2 は既約なので，$C_1 \times C_2$ も既約であることを D^n が既約であることを示したのと同じように証明できる．またネーター位相の一般論から $\dim(C_1 \times C_2) \geq d_1 + d_2$ であることも次のようにして分かる．

まず C_2 が有限集合のときは，C_2 は一点集合でなければならない．このとき $\dim(C_2) = 0$ で $C_1 \times C_2$ の次元と C_2 の次元は一致する．

一般の場合 $\dim(C_2) = d_2$ ということから

$$C_2^0 \subset C_2^1 \subset \cdots \subset C_2^{d_2} = C_2$$

という既約な真部分閉集合の上昇列が存在する．これに対応して，

$$C_1 \times C_2^0 \subset C_1 \times C_2^1 \subset \cdots \subset C_1 \times C_2^{d_2}$$

を考えれば，各 $C_1 \times C_2^i$ は既約集合なので，$\dim(C_1 \times C_2) \geq d_1 + d_2$ が分かる．

つぎに，D^{2n} の既約な真部分閉集合 C に対して $\dim(C \cap \Delta) \geq \dim(C) - n$ を示そう．これは公理 (Z3) を Δ_i に関して $i = 1, \cdots, n$ まで適用すれば得られる．

よって $C_1 \cap C_2$ の各既約成分の次元は，少なくとも $d_1 + d_2 - n$ 以上である． □

命題 5.12 $C \subseteq D^n$ を既約閉集合,$\pi : D^n \longrightarrow D^k$ を射影とする．このとき次が成り立つ．

(1) $\overline{\pi(C)} = D^k$ ならば，$\dim(C) \geq k$ である．

(2) ある $\bar{a} \in D^k$ に対して，$\pi^{-1}(\bar{a}) \cap C$ が空でない有限集合ならば，$\dim(C) \leq k$ である．

証明 (1) k に関する数学的帰納法で示す．

$k = 1$ の場合．もし $\dim(C) = 0$ ならば，C は既約閉集合なので一点集合でなければならない．よって $\pi(C) \subset D$ も一点集合である．一点集合は閉集合だから $\overline{\pi(C)} = \pi(C)$ となって仮定に反する．よって $\dim(C) \geq 1$ でなければならない．

$k > 1$ の場合．公理 (Z1) から $\overline{\pi(C)} = D^k$ の真部分閉集合 F が存在して $\pi(C) \supseteq (D^k \backslash F)$ が成り立っている．いま $a \in F$ に対して $F(a) = \{y \in D^{k-1} : (a, y) \in F\}$ とおく．写像 $f_a : D^{k-1} \longrightarrow D^k$ を $f_a : \bar{x} \longmapsto (a, \bar{x})$ によって定義すると，公理 (Z0) より f_a は連続写像である．$F(a) = f_a^{-1}(F)$ なので $F(a)$ は閉集合である．

もしすべての $a \in D$ に対して $F(a) = D^{k-1}$ ならば，$F = D^k$ となって F が D^k の真部分閉集合であることに反する．よって $F(a)$ が D^{k-1} の真部分閉集合であるような点 $a \in D$ を 1 つ固定する．

$$C' = \{\bar{x} \in C : \pi(\bar{x}) \in \{a\} \times D^{k-1}\}$$

とおく．射影 π は連続写像で，$C' = C \cap \pi^{-1}(\{a\} \times D^{k-1})$ である．$\{a\} \times D^{k-1}$ は閉集合であるので，C' は閉集合である．

さてすべての $\bar{x} \in C$ に対して $\pi(\bar{x}) \in \{a\} \times D^{k-1}$ となったとする．この場合 $\pi(C) \subseteq \{a\} \times D^{k-1}$ である．よって $\overline{\pi(C)} \subseteq \{a\} \times D^{k-1}$ となり $\overline{\pi(C)} = D^k$ という仮定に反する．したがってある $\bar{x} \in C$ に対して $\pi(\bar{x}) \notin \{a\} \times D^{k-1}$ であり，C' は C の真部分集合である．

射影 $\theta : D^k \longrightarrow D^{k-1}$ を $(x_1, x_2, \cdots, x_k) \longmapsto (x_2, \cdots, x_k)$ によって定め，$\pi' = \theta \circ \pi$ とおく．$\pi(C) \supseteq (D^k \backslash F)$ なので，$\pi'(C') \supseteq (D^{k-1} \backslash F(a))$ である．よって，$\overline{\pi'(C')} = \overline{D^{k-1} \backslash F(a)} = D^{k-1}$ である．D^{k-1} は既約閉集合だから，命題 5.9 から $\overline{\pi'(C')} = \overline{\pi'(C'')} = D^{k-1}$ となる C' の既約成分 C'' が存在する．帰納法の仮定から $\dim(C'') \geq k-1$ である．よって，$\dim(C') \geq k-1$ であり，C' は C の真部分閉集合だったので $\dim(C) \geq k$ である．

(2) 点 $\bar{a} \in D^k$ を $\pi^{-1}(\bar{a}) \cap C$ が有限になるように 1 つ固定する．$\bar{a} = (a_1, \cdots, a_k)$ とし，各 $\bar{x} \in D^n$ に対し $\pi(\bar{x}) = (\pi_1(\bar{x}), \cdots, \pi_k(\bar{x}))$ とする．このとき

$$\pi^{-1}(\bar{a}) \cap C = \pi_1^{-1}(a_1) \cap \cdots \cap \pi_k^{-1}(a_k) \cap C$$

である．$C_0 = C$, $C_{i+1} = C_i \cap \pi_{i+1}^{-1}(a_{i+1})$ とおく．ただし，$i = 0, \cdots, k-1$．$C_k = \pi^{-1}(\bar{a}) \cap C$ だから $\dim(C_k) = 0$ である．各 $\pi_i^{-1}(a_i) \subseteq D^n$ の次元は $n-1$ である．次元定理を繰り返し適用することによって C_i のすべての既約成分の次元が少なくとも $\dim(C) - i$ 以上であることがわかる．よって $\dim(C_k) \geq \dim(C) - k$ となり，$\dim(C) \leq k$ となる．□

定義 5.13　ネーター位相をもつ集合 X, Y を考える．写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し，$f(X)$ の一般点 a の逆像 $f^{-1}(a)$ が有限集合であるとき，f を**ほとんど有限対 1** と言う．

命題 5.14　C を D^n の既約な真部分閉集合とする．このとき C から D^{n-1} へのほとんど有限対 1 な連続写像が存在する．

証明　まず D の真部分閉集合は有限集合であり，既約な真部分閉集合は一点集合しかないことを思い出しておこう．

最初に $n = 2$ の場合を考える (D^2 を 2 次元平面，C を 1 次元曲線として議論を追っていただきたい)．C を D^2 の既約な真部分閉集合とする．$\pi : D^2 \longrightarrow D$ を射

影とする．ある $a \in \pi(C)$ に対して $C(a) = \{y \in D : (a, y) \in D^2\}$ が有限集合ならば，補題 5.10 によりほとんどすべての $a \in \pi(C)$ に対して $C(a)$ は有限なので，射影 π の C への制限が求めるものである．

すべての $a \in \pi(C)$ に対して $C(a)$ が無限集合である場合，C は D^2 の閉集合なので公理 (Z2) により $C(a) = D$ である．よって $\pi(C) = \{x \in D : \forall y \in D((x, y) \in C)\}$ であり，$C = \pi(C) \times D$ が成り立っている．b を D の点とし，写像 $g : x \longmapsto (x, b)$ を考えると g は連続写像であり $\pi(C) = g^{-1}(C)$ となっているので，$\pi(C)$ は閉集合である．C は D^2 の既約な真部分閉集合なので $\pi(C)$ は D の既約な真部分閉集合，すなわち一点集合である．よってある $a \in D$ が存在して $C = \{a\} \times D$ となっている．この場合 $f : \{a\} \times D \longrightarrow D$ を $(a, x) \longmapsto x$ によって定義すれば f が求める写像である．

$n > 2$ の場合．$D^n = D^{n-1} \times D, \pi : D^n \longrightarrow D^{n-1}$ とする．$n = 2$ の場合の証明と同様，ある $a \in \pi(C)$ に対して $C(a)$ が有限になる場合とすべての $a \in \pi(C)$ について $C(a)$ が無限集合になる場合に分けて証明する．前者の場合は，$n = 2$ のときと同じ様に証明できる．後者の場合，$C = \pi(C) \times D$ を同様に示し，$\pi(C)$ が D^{n-1} の既約な真部分閉集合であることを導く．帰納法の仮定から射影 $\pi' : D^{n-1} \longrightarrow D^{n-2}$ が存在して $\pi(C)$ の各点の逆像は有限集合である．$f : D^n \longrightarrow D^{n-1}$ を $(x, y) \longmapsto (\pi(x), y)$ によって定義すると f が求めるものである．□

命題 5.15　$C \subseteq D^n$ を既約な閉集合とする．このとき $\dim(C) = k$ であるための必要十分条件は，命題 5.12 の性質 (1), (2) を満たす射影 $\pi : D^n \longrightarrow D^k$ が存在することである．

証明　n に関する帰納法で示す．$C = D^n$ のときは，恒等写像 $\pi : D^n \longrightarrow D^n$ が性質 (1), (2) を満たしている．

C が D^n の既約な真部分閉集合であるときは，上の補題から，射影 $\pi_1 : D^n \longrightarrow D^{n-1}$ が存在して，ほとんどすべての $y \in \pi(C)$ の逆像は有限集合である．帰納法から $\pi_2 : D^{n-1} \longrightarrow D^k$ と $a \in D^k$ が存在して，

$$\overline{\pi_2(\overline{\pi_1(C)})} = D^k \text{ かつ } \pi_2^{-1}(a) \cap \overline{\pi_1(C)} \text{ は有限集合}$$

が成り立つ．$k=\dim(\overline{\pi_1(C)})$ である．また命題 5.9 により，既約閉集合の射影の閉包は既約閉集合であるので $\overline{\pi_1(C)}$ は D^{n-1} の既約閉集合である．公理 (Z1) から $\overline{\pi_1(C)}$ の既約閉集合 F が存在して，

$$\pi_1(C) \supseteq (\overline{\pi_1(C)} \backslash F)$$

であり，命題 5.10 からほとんどすべての $a \in \overline{\pi_1(C)} \backslash F$ に対して

$$|\pi_1^{-1}(a) \cap C| < \omega$$

が成り立っている．よって $\dim(F) < k$ であり，$\overline{\pi_2(F)}$ は D^k の既約閉集合である．$a \in D^k \backslash \overline{\pi_2(F)}$ を $\pi_2^{-1}(a)$ が有限集合になるようにとる．このとき $(\pi_2\pi_1)^{-1}(a)$ も有限集合である．また，

$$\pi_2\pi_1(C) \supseteq (\pi_2(\overline{\pi_1(C)}) \backslash \pi_2(F))$$

が成り立っているので，

$$\overline{\pi_2\pi_1(C)} \supseteq \overline{\pi_2(\overline{\pi_1(C)}) \backslash \pi_2(F)} = \overline{\pi_2(\overline{\pi_1(C)})} = D^k$$

である．よって射影 $\pi_2\pi_1 : D^n \longrightarrow D^k$ が命題 5.12 の性質 (1), (2) を持っている．

□

さていよいよ最初の重要な定理を紹介しよう．すなわち，ザリスキー幾何のモデル理論が量記号を消去することを保障する定理である．

定義 5.16　D をザリスキー幾何とする．$X \subseteq D^n$ が閉集合の有限ブール和になっているとき，X を**構成可能**という．

定理 5.17 (量記号消去，ザリスキー幾何における Chevalley の定理)　ザリスキー幾何において，構成可能集合の射影は構成可能である．

証明　π を射影とすると集合 A, B に対して $\pi(A \cup B) = \pi(A) \cup \pi(B)$ が成り立っている．一般の構成可能集合 C は $\bigcup_{i=1}^{n}(C_i \backslash F_i)$ (ただし C_i, F_i は閉集合) の形をしているので，各 $\pi(C_i \backslash F_i)$ が閉集合の有限ブール和になっていることを示せばよい．すなわち，$C \subseteq D^n \times D$ を閉部分集合，$F \subseteq C$ を閉部分集合，さらに $\pi_1 : D^n \times D \longrightarrow D^n$ を射影としたとき，$\pi_1(C \backslash F)$ が有限個の閉集合のブール和になってい

ることを $\dim(C)$ に関する帰納法で示せばよい.

集合 C が既約な場合を示せば十分である. $C_1 = \overline{\pi_1(C)}$ とおくと, C_1 は既約閉集合である. 公理 (Z1) から C_1 のある既約な真部分閉集合 H に対して $\pi_1(C) \supseteq C_1 \backslash H$ が成り立つ.

$$C_0 = \{x \in D^n : (\forall y \in D)((x, y) \in C)\},$$

$$F_0 = \{x \in D^n : (\forall y \in D)((x, y) \in F)\}$$

とおくと, C_0 と F_0 は閉集合である. また $C_0 \subseteq C_1$ である.

(1) $C_0 = C_1$ である場合. $\pi_1(C \backslash F) = C_0 \backslash F_0$ なので証明終わり.

(2) $C_0 \subset C_1$ が真部分集合になっている場合. $F_1 = \overline{\pi_1(F)}$ とおく.

(a) F_1 が C_1 の真部分閉集合である場合. $F_2 = F_1 \cup H$ も C_1 の真部分閉集合である. よって $(F_2 \times D) \cap C$ は C の真部分閉集合である. よって, $\dim((F_2 \times D) \cap C) < \dim(C)$ である. したがって帰納法の仮定から

$$\pi_1(((F_2 \times D) \cap C) \backslash F)$$

は, 有限個の閉集合のブール和になっている. さて, 等式

$$\pi_1(C \backslash F) = \pi_1(((F_2 \times D) \cap C) \backslash F) \cup (C_1 \backslash F_2)$$

が成り立っているので, $\pi_1(C \backslash F)$ も有限個の閉集合のブール和になっている.

(b) $C_1 = F_1$ かつ $C_0 \neq F_1$ の場合. このときは $C = F$ でなければならないことが次のようにして分かる. C は既約閉集合なので $\dim(C) = \dim(F)$ であることを示せばよい. 実際 $\dim(C) = \dim(C_1)$ かつ $\dim(F) = \dim(F_1)$ なので, $\dim(C) = \dim(F)$ となっている. □

この定理から直ちに導かれる結果として, ザリスキー幾何 D が強極小集合であることを示すことができる. 本来は, D が極小であることと D の任意の初等拡大が極小であることを示さなければならないが, ザリスキー幾何のモデル理論は次節で展開するので, ここでは任意の構成可能集合 X に対して, X または X の補集合が有限集合であることを示す.

系 5.18 ザリスキー幾何 D は強極小集合である.

証明　$E \subseteq D^n \times D$ を構成可能集合とする．各 $\bar{a} \in D^n$ に対して，$E(\bar{a})$ または $D \backslash E(\bar{a})$ が有限集合であることを示す．$E = \bigcup_{i=1}^{n} (C_i \backslash F_i)$ (各 C_i, F_i は閉集合) なので $E = C \backslash F$ (C, F は閉集合) の場合を示せば十分である．$C(\bar{a})$ と $F(\bar{a})$ に対して公理 (Z2) を適用すれば，$E(\bar{a})$ または $D \backslash E(\bar{a})$ は有限集合である．　□

注意 5.19　上の証明で公理 (Z2) を適用すると，$E(\bar{a})$ が有限集合である場合その元の個数 $|E(\bar{a})|$ はパラメーター $\bar{a}$ の取り方に関わらず或る定数 m で押さえられることがわかる．よってモデル理論的意味で，D が強極小集合であることが分かる．

5.1.1　滑らかな代数曲線はザリスキー幾何である

D を代数的閉体 K 上定義された，滑らかで既約な射影代数曲線とする．各 D^n には K^n のザリスキー位相を制限することによって位相が自然に定義される．このようにして D^n に導入された位相は明らかにネーター性を持っている．この位相によって D が完備ザリスキー幾何になっていることを説明しよう．

公理 (Z0) が成り立っていることは明らかであろう．

公理 (Z1) を確認しよう．$C \subset D^m$ とし，$\pi : D^m \longrightarrow D^n$ を射影とする．代数的閉体の理論は量記号を消去するので，$\pi(C) = \bigcup_i (F_i \backslash E_i)$ と書けることが分かる．ただし，$F_i \subseteq D^m$ は既約閉集合で $E_i \subset F_i$ は閉集合である．よって $\overline{\pi(C)} = \bigcup_i (F_i)$ である．$E = \bigcup_i (E_i)$ とおけば，$\pi(C) \supseteq \left(\bigcup_i (F_i)\right) \backslash E$ である．

公理 (Z2) を示す．D は既約な曲線だから，強極小集合になっている．よって任意の定義可能集合 $C \subseteq D^n \times D$ に対して，正整数 N が存在して，任意の $\bar{a} \in D^n$ に対して，$|C(\bar{a})| \leq N$ または $|D \backslash C(\bar{a})| \leq N$ が成り立っている．さて C が閉集合ならば $C(\bar{a})$ も閉集合である．集合 D にはザリスキー位相が入っているので，$C(\bar{a})$ が無限集合であれば $C(\bar{a}) = D$ である．

次元定理 (Z3) が成り立っていることを示す決め手は次の定理である．

補題 5.20　V を，代数的閉体上定義された滑らかな多様体とする．C_0, C_1 を既約部分多様体とする．W が $C_0 \cap C_1$ の空でない既約成分ならば，$\dim W \geq \dim C_0 + \dim C_1 - \dim V$ が成り立つ．

ザリスキー幾何の完備性は，射影多様体の完備性から自然に得られる．

5.2 ザリスキー幾何のモデル理論

ザリスキー幾何 D のモデル理論を展開するために，まずその言語 L_D から説明しよう．D^n の各閉集合 C に対して n 変数述語記号 P_C を用意し，P_C 全体からなる言語を L_D とする．D の各点 a は閉集合なので，L_D は a に対応する述語すなわち定数を含んでいる．よって $D = \mathrm{dcl}(\varnothing) = \mathrm{acl}(\varnothing)$ となっていることに注意しよう．D^* を任意の L_D-構造とすると，D を D^* の部分構造としてよいことは明らかである．また，関数記号は含んでいない．

定義 5.21 D^* を L_D-構造とする．各 n に対して $(D^*)^n$ の位相を次のように定義する．$D^m \times D^n$ の閉集合 C と $\bar{a} \in (D^*)^m$ に対して，

$$C^*(\bar{a}) = \{\bar{b} \in (D^*)^n : D^* \models P_C(\bar{a}, \bar{b})\}$$

とする．すべての C とすべての $\bar{a}$ に対して $C^*(\bar{a})$ を考え，それら全体を $(D^*)^n$ の基本閉集合と定義する．また，$C^*(\bar{a})$ のような閉集合を $\bar{a}$-閉集合と呼ぶ．

よって $(D^*)^n$ の閉集合は，基本閉集合の有限個の和集合あるいは，有限個または無限個の共通部分である．この中には，空集合と $(D^*)^n$ も含まれる．特に，$\bar{a}$ がない場合，すなわち D^m の閉集合 C に対して，

$$C^* = \{\bar{b} \in (D^*)^m : (D^*)^m \models P_C(\bar{b})\}$$

は $(D^*)^m$ の閉集合である．この C^* のような閉集合を 0-閉集合と呼ぶ．

今後，閉集合 C と，C に対応する述語記号 P_C を特に厳密には区別しないことにする．また，C と C^* も厳密に区別しない．

注意 5.22 各 $(D^*)^n$ が上で定義した方法で位相空間になっていることは明らかである．基本閉集合の有限個の和集合と，基本閉集合の有限個の共通部分がそれぞれ基本閉集合になっていることを確認しておく．

$C_1^*(\bar{a}_1)$ と $C_2^*(\bar{a}_2)$ を基本閉集合とする．$C_1^*(\bar{a}_1) \cup C_2^*(\bar{a}_2)$ も閉集合であることを示す．

$$C_1^*(\bar{a}_1) = \{\bar{y}_1 \in (D^*)^n : D^* \models C_1(\bar{a}_1, \bar{y}_1)\},$$

$$C_2^*(\bar{a}_2) = \{\bar{y}_2 \in (D^*)^n : D^* \models C_2(\bar{a}_2, \bar{y}_2)\}$$

ただし，$C_1 \subseteq D^{m_1} \times D^n$, $C_2 \subseteq D^{m_2} \times D^n$ は閉集合，$\bar{a}_1 \in (D^*)^{m_1}$, $\bar{a}_2 \in (D^*)^{m_2}$ である．$C_1 \times D^{m_2}$, $C_2 \times D^{m_1}$ はそれぞれ $D^{m_1+m_2} \times D^n$ の閉集合である．$(C_1 \times D^{m_2}) \cup (C_2 \times D^{m_1})$ を $C_1 \cup C_2$ と書く．このとき

$$\begin{aligned}\bar{y} \in C_1^*(\bar{a}_1) &\Longrightarrow (\bar{a}_1, \bar{y}) \in C_1 \\ &\Longrightarrow (\bar{a}_1, \bar{y}, \bar{a}_2) \in C_1 \times D^{m_2} \\ &\Longrightarrow (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{y}) \in C_1 \cup C_2\end{aligned}$$

である．同様に，$\bar{y} \in C_2^*(\bar{a}_2) \Longrightarrow (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{y}) \in C_1 \cup C_2$ も分かる．逆に $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{y}) \in C_1 \cup C_2$ とすると，$(\bar{a}_1, \bar{y}) \in C_1$ または，$(\bar{a}_2, \bar{y}) \in C_2$ も分かる．よって

$$C_1^*(\bar{a}_1) \cup C_2^*(\bar{a}_2) = \{\bar{y} \in (D^*)^n : D^* \models (C_1 \cup C_2)(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{y})\}$$

であるので，$C_1^*(\bar{a}_1) \cup C_2^*(\bar{a}_2)$ は閉集合である．ここで，$D^{m_1} \times D^{m_2} \times D^n$ と $D^{m_2} \times D^{m_1} \times D^n$ を同一視して議論しているが，ザリスキー幾何の公理 (Z0) を繰り返し適用すれば，これら 2 つの空間が同相であることは容易に分かるので問題ない．この種の同一視は今後断りなしに使う．2 つの基本閉集合の共通部分が基本閉集合であることも同様に示すことができる．

5.2.1　ザリスキー幾何の初等拡大がザリスキー幾何になること

ここでは，ザリスキー幾何 D の初等拡大 D^* が再びザリスキー幾何になることを証明する．D^* を L_D-構造としたとき，D^* にどのように位相を定義するかは既に述べたので，残るは D^* の位相がネーター位相であることと，公理 (Z0) ～ (Z3) を満たすことを調べればよい．

D について Chevalley の定理が成り立つから，D^* についても成り立つ．よって D^* は量記号を消去する．

命題 5.23　D をザリスキー幾何，D^* を L_D-構造とする．定義 5.21 の方法で，各 $(D^*)^n$ に位相を定義する．このとき，$\{(D^*)^n : n \in \mathbb{N}\}$ はザリスキー幾何の公理 (Z0), (Z1) そして (Z2) を満たしている．

証明　演習問題とする．□

系 5.18 より D の理論は強極小理論である．よって Morley 階数と次元は一致す

る．以後この節では，rk, RM, dim が混在するがすべて同等な概念であることを注意しておく．

ザリスキー幾何の任意の初等拡大が再びザリスキー幾何になることを次に示すが，その前に補題を 2 つ証明する．

補題 5.24 D をザリスキー幾何とする．D_1 を D^k の既約閉集合，E を $D_1 \times D^m$ の既約閉集合とする．このとき，D_1 の真部分閉集合 F_1 が存在して，すべての $\bar{a} \in D_1 \backslash F_1$ に対して $E(\bar{a})$ のすべての成分の次元は $\dim(E) - \dim(D_1)$ 以上である．

証明 $D_1 = D^k$ の場合は，$F_1 = \varnothing$ とする．E を $D^k \times D^m$ の既約閉集合とする．このとき，任意の $\bar{a} \in D^k$ に対して $E(a)$ は D^m の閉集合なので，次元定理より，$E(a)$ のすべての既約成分の次元は $\dim(E) - k$ 以上である (E の次元が k 以下の場合，$E(a)$ は有限集合)．

よって，D_1 は D^k の真部分集合とする．$r = \dim(D_1)$ とおく．射影 $\pi : D^k \longrightarrow D^r$ と D_1 の真部分集合 F_1 が存在して，π は $D_1 \backslash F_1$ で有限対 1 である．よって D^k を $D^r \times D^l$ とみなすことにする．$\bar{a} \in D_1 \backslash F_1$ を $\bar{a} = (a_r, a_l) \in D^r \times D^l$ と書くことにする．このとき

$$
\begin{aligned}
E(\bar{a}) &= \{\bar{b} \in D^m : (\bar{a}, \bar{b}) \in E\} \\
&= \{\bar{b} \in D^m : (a_r, a_l, \bar{b}) \in E\} \\
&= E(a_r)(a_l)
\end{aligned}
$$

D^r に対して上の議論を適用すれば，$E(a_r) \subseteq D^l \times D^m$ の任意の既約成分 U の次元は，$\dim(E) - r$ 以上である．π の性質から $U \subseteq D^l \times D^m$ の D^l-成分への射影は有限集合である．U は既約閉集合なので U の D^l-成分への射影は一点集合である．よって，$U = \{a_l\} \times U(a_l)$ であることが分かる．U が $E(a_r)$ の既約成分を動くとき，$E(a)$ は $U(a_l)$ によって覆われるから，$E(a)$ の任意の既約成分の次元は，$\dim(E) - r$ 以上である． □

補題 5.25 D をザリスキー幾何，D^* を L_D-構造とする．$C \subseteq (D^*)^n$ を閉集合とする．有限集合 $A \subset D^*$ に対して，集合 C は $\mathrm{Aut}(D^*/A)$ で不変とする．このとき，C は A-閉集合である．すなわち，$\mathrm{Aut}(D^*/A)$ で動かない閉集合は，A 上定義可能である．

証明　A の要素を並べて $\bar{a}=\{a_1,\cdots,a_m\}$ と書くことにする．どのような順序で書くかは重要でない．$c\in C$ を 1 つ固定する．

点 $(\bar{a},c)$ を含む最小の 0-閉集合を C^* とおき，D_1 を $\bar{a}$ の軌跡とする．$k=\dim(D_1)=\dim(\bar{a}/D)$, $l=\dim(C^*)-k$ とする．既約閉集合 C^*, D_1 に対して上の補題 5.24 を適用して得られる閉集合を F_1 とする．任意の D-閉集合 C' と任意の $\bar{a}'\in D_1\backslash F_1$ に対して，再び補題 5.24 から，

$$D\models(C^*(\bar{a}')\subseteq C')\vee(\mathrm{rk}(C^*(\bar{a}')-C')\geq l)$$

である．ここで補題 3.36 より，$\mathrm{rk}(C^*(\bar{a}')-C')\geq l$ が論理式で表現可能であることを用いた．この状況を D の初等拡大 D^* で考えると，任意の閉集合 C' と任意の $\bar{a}'\in D_1\backslash F_1$ に対して，

$$D'\models(C^*(\bar{a}')\subseteq C')\vee(\mathrm{rk}(C^*(\bar{a}')-C')\geq l)$$

である．よって閉集合 $C\subseteq(D^*)^n$ に対しても，

$$C^*(\bar{a}')\subseteq C \text{ または } \mathrm{rk}(C^*(\bar{a}')-C)\geq l$$

でなければならない．実は，$C^*(\bar{a})\subseteq C$ となっている．

もしそうでないとして，$b\in C^*(\bar{a})-C$, $\mathrm{rk}(b/D,\bar{a})=l$ であるような b をとる．$\mathrm{rk}(\bar{a}b)=k+l=\dim(C^*)$ なので，$(\bar{a},b)$ は C^* の一般点である．したがって $\sigma(\bar{a},b)=(\bar{a},c)$ となる $\sigma\in\mathrm{Aut}(D^*)$ が存在する．ところ $c\in C$ であったから矛盾する．よって $C^*(\bar{a})\subseteq C$ である．$c\in C^*(\bar{a})$ となっていることに注意する．

C のどんな点も，C の部分集合になっているどれかの A-閉集合に属していることが分かった．コンパクト性定理より，有限個の A-閉集合 $C_1,\cdots,C_t$ が存在して，

$$C_i\subseteq C\ (i=1,\cdots,t) \text{ かつ } \bigcup_{i=1}^{t}C_i=C$$

である．よって注意 5.22 より，C は A-閉集合である．□

注意 5.26　(1) この証明は，実は定理 A.8 の証明と本質的に同じである．

(2) 注意 5.22 を考慮に入れれば，この補題の実質的内容はこうである．閉集合 $C=\bigcap_{i=1}^{\infty}C_i(\bar{a}_i)$ が $\mathrm{Aut}(D^*/A)$ で動かないとき，C は A-閉集合である．

D をザリスキー幾何, D^* を D の初等拡大とする. $\bar{a} \in (D^*)^n$ とする. $(D^*)^n$ における $\bar{a}$-閉集合族 $\{F_i(\bar{a}) : i \in \omega\}$ を考える. ここで各 F_i は D^{n+m} の閉集合とする. D^{n+m} のネーター性から, $\bigcap_{i\in\omega} F_i$ は有限個の閉集合 $F_{i_1}, \cdots, F_{i_k}$ の共通部分 K になっている. $K(a)$ は $F_1(\bar{a}), \cdots, F_i(\bar{a}), \cdots$ の有限共通部分であり, 各 i に対して $K(\bar{a}) \subseteq F_i(\bar{a})$ である. よって $F_1(\bar{a}), \cdots, F_i(\bar{a}), \cdots$ の中に無限降下列は存在しない. この意味で, $\bar{a}$-閉集合たちからなる無限降下列は存在しない. つまり $\bar{a}$-閉集合たちに関して言えば, D^* の位相はネーター性を持っている. これを $\bar{a}$-位相と呼ぼう. D^* の位相は, $\bar{a}$ が動いたときに $\bar{a}$-位相たちの和集合になっているのでネーター性は自明でない.

定理 5.27 ザリスキー幾何 D の初等拡大 D^* に定義 5.21 の方法で位相を定義する. このとき D^* もザリスキー幾何になっている.

証明 補題 5.23 より, D^* はザリスキー幾何の公理 (Z0), (Z1) そして (Z2) を満たす. 難しいのは D^* の位相がネーター位相であることを示すことである. ひとたび D^* の位相がネーター位相であることが分かれば, 閉集合の既約成分という概念が意味を持つ. D^* がザリスキー幾何の公理 (Z3) を満たすことは容易に確認できるので D^* もザリスキー幾何になることが分かる.

各正整数 n に対して $(D^*)^n$ の位相がネーター位相であることを示す. もしそうでないとすると $(D^*)^n$ の中に閉集合の無限降下列,

$$C_1(a_1^*) \supset \cdots \supset C_i(a_i^*) \supset \cdots$$

が存在する. ここで各 C_i は $D^{n+m(i)}$ の閉集合, かつ $a_i^* \in (D^*)^{m(i)}$ である. 任意の正整数 M に対して,

$$D^* \models C_1(a_1^*) \supset \cdots \supset C_M(a_M^*)$$

なので

$$D^* \models \exists v_1 \cdots \exists v_M (C_1(v_1) \supset \cdots \supset C_M(v_M))$$

である. $D \prec D^*$ だから

$$D \models \exists v_1 \cdots \exists v_M (C_1(v_1) \supset \cdots \supset C_M(v_M))$$

である．よって D^n のなかで

$$C_1(a_1) \supset \cdots \supset C_M(a_M)$$

となる．つまり M ごとに，長さ M の閉集合の降下列が存在する．すなわち

$$\begin{array}{lllllllll}
C_1(a_1^1) & \supset & & & & & & & \\
C_1(a_1^2) & \supset & C_2(a_2^2) & & & & & & \\
C_1(a_1^3) & \supset & C_2(a_2^3) & \supset & C_3(a_3^3) & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & \\
C_1(a_1^l) & \supset & C_2(a_2^l) & \supset & C_3(a_3^l) & \supset & \cdots & \supset & C_l(a_l^l) \\
 & \vdots & & & & & & &
\end{array}$$

となる．したがって D^n の中に，任意有限の長さをもった閉集合の降下列が存在する．これが D^n のネーター性に反することを示す．

主張： i を正整数とする．閉集合族 $\{C_i(a) : a \in D^{m(i)}\}$ を考える．各 $C_i(a)$ は既約閉集合か，あるいは n_a 個の既約成分を持つ．集合 $\{n_a : a \in D^{m(i)}\}$ は最大値を持つ．

証明：$K = \bigcap_{a \in D^{m(i)}} C_i(a)$ とおくと，D^n のネーター性から K は $\{C_i(a) : a \in D^{m(i)}\}$ のなかの有限個の共通部分になっている．各 $a \in D^{m(i)}$ に対して $K \subseteq C_i(a)$ である．よって $\{n_a : a \in D^{m(i)}\}$ は最大値を持つ．(終わり)

この主張から，D^n の中に，上の形の任意有限の長さをもった閉集合の降下列は存在しないことが分かる．よって $(D^*)^n$ の位相はネーター性を持つ．□

超準解析のことをご存知の読者は，超準モデルのことを思い出していただきたい．ザリスキー幾何 D_0 の初等拡大 D は D の超準モデルになっているのである．D の性質を調べるのに，超準モデル D を利用しようという訳である．超準モデルのなかでも，飽和モデルはさらに便利である．L_{D_0}-理論としての $\mathrm{Th}(D_0)$ と $\mathrm{Th}(D)$ は同じだから，以後ザリスキー幾何 D_0 の理論を調べるときには，D_0 が飽和モデルであると仮定しても一般性を失わない．

5.2.2 ザリスキー幾何の特殊化 (準同型)

k を体，K を k の拡大体とする．K^n の点 $(x_1, \cdots, x_n)$ を 1 つ固定する．各 k-多項式 $F(X_1, \cdots, X_n) \in k[X_1, \cdots, X_n]$ に対して $F(x_1, \cdots, x_n)$ を対応させることによって，写像

$$f_{(x_1, \cdots, x_n)} : k[\overline{X}] \longrightarrow K$$

を考える．これは，環 $k[\overline{X}]$ から K への準同型になっている．

K^n の点 $(x'_1, \cdots, x'_n)$ を考える．

$$\text{任意の } F(\overline{X}) \in k[\overline{X}] \text{ に対して } F(x_1, \cdots, x_n) = 0 \Longrightarrow F(x'_1, \cdots, x'_n) = 0$$

が成り立っているとき，点 $(x'_1, \cdots, x'_n)$ を点 $(x_1, \cdots, x_n)$ の**特殊化**と呼ぶ．この場合，$G(\overline{X}), H(\overline{X}) \in k[\overline{X}]$ に対して

$$G(x_1, \cdots, x_n) = H(x_1, \cdots, x_n) \Longrightarrow G(x'_1, \cdots, x'_n) = H(x'_1, \cdots, x'_n)$$

が成り立つ．

点 $(x'_1, \cdots, x'_n) \in K^n$ が点 $(x_1, \cdots, x_n) \in K^n$ の特殊化であるとき，任意の $F(\overline{X}) \in k[\overline{X}]$ に対して

$$f_{(x_1, \cdots, x_n)} : F(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto F(x'_1, \cdots, x'_n)$$

を考えると，この $f_{(x_1, \cdots, x_n)}$ は各 $x_i \, (1 \leq i \leq n)$ に対して

$$f_{(x_1, \cdots, x_n)} : x_i \longmapsto x'_i$$

を満たす，$k[x_1, \cdots, x_n]$ から $k[x'_1, \cdots, x'_n]$ への写像を定義する．この $f_{(x_1, \cdots, x_n)}$ もやはり特殊化と呼ぶ (“*Commutative Algebra*”, O.Zariski-P.Samuel, GTM 29 Springer, Chap VI 参照).

また，$\mathbb{R}$ の超準モデル $\mathbb{R}^*$ からその標準部分である $\mathbb{R}$ への，モデル理論の意味での準同型である**標準部分写像**と呼ばれる概念が，超準解析の創始者，A.Robinson (J.Robinson とは別人) によって提唱されている．

これらに対応する概念として，ザリスキー幾何の特殊化という概念を導入する．

D をザリスキー幾何，L_D を D の 0-閉集合に対応する述語記号からなる言語とする．

定義 5.28　M, N を $\mathrm{Th}_{L_D}(D)$ のモデルとする．A を M の部分集合，$f : A \longrightarrow N$ を写像とする．k が自然数を動くとき，任意の $\bar{c} \in A^k$ と任意の述語記号 P に対して，

$$M \models P(\bar{c}) \text{ ならば } N \models P(f(\bar{c}))$$

が成り立つとき，f を**特殊化**と呼ぶ．モデル理論的に言えば，f はモデル M から N への準同型に他ならない．以後の議論でザリスキー幾何の特殊化を考える場合は

- 飽和ザリスキー幾何 D に対する特殊化 $f : D \longrightarrow D$,
- ザリスキー幾何 $D \prec D^*$ に対する特殊化 $f : D^* \longrightarrow D$,

のいずれかを考える場合が多い．

A, B が添字を用いて，$A = (a_i : i \in I), B = (b_i : i \in I)$ と表されるとき，特殊化 $f : A \longrightarrow B$ を $f : a_i \longmapsto b_i$ と書く．f を書かなくても混乱の恐れがないときは，単に $a_i \longmapsto b_i$ と書く．

定義 5.29 (および記法)　(1) $a \longrightarrow a'$ が特殊化のとき，$\mathrm{rk}(a) - \mathrm{rk}(a')$ を $\mathrm{rk}(a \longrightarrow a')$ と書く．

(2) 特殊化 $ab \longrightarrow a'b$ を $a \longrightarrow_b a'$ と書く．

(3) I を無限集合とする．任意の有限な $I_0 \subseteq I$ について $(a_i : i \in I_0) \longrightarrow (a'_i : i \in I_0)$ が成り立つとき，$(a_i : i \in I) \longrightarrow (a'_i : i \in I)$ と書く．

(4) D_1 を既約閉集合とし，$C \subseteq D_1 \times D_2$ とする．D_1 の一般点 a に対して $r = \mathrm{rk}(C(a))$ とおく．

$$E_0(C, D_1) = \{x \in D_1 : \mathrm{rk}(C(x)) > r\}, \quad E(C, D_1) = \overline{E_0(C, D_1)}$$

とおく．D_1 がある点 b を含む最小の既約閉集合，C が (b, a) を含む最小の既約閉集合 (つまり (b, a) を通る曲線，(b, a) の軌跡と呼ぶ) でさらに $b' \in E(C, D_1)$ のとき，特殊化 $b \longrightarrow b'$ は a に関して**例外的**であるという．

補題 5.30　$D_1 \subseteq D^l, D_2 \subseteq D^m$ と，$C \subseteq D_1 \times D_2$ をそれぞれ既約閉集合とする．任意の n に対して $D_1 \times D^n$ で次元定理が成り立っているとする．さらに，$\overline{\pi(C)} = D_1$ となっているとする．a を D_1 の一般点とし，$r = \mathrm{rk}(C(a))$ とおく．

正整数 $l_1, \cdots, l_m$ に対して，$C_i \subseteq D_1 \times D_2 \times D^{l_i}$ を $C \times D^{l_i}$ の既約閉集合とす

る．さらに $a_i \in D^{l_i}$ を $C(a) = \bigcup_{i=1}^{m} C_i(a, a_i)$ であるようにとる．このとき，特殊化

$$(a, a_1, \cdots, a_m) \longrightarrow (a', a'_1, \cdots, a'_m)$$

に対して，$a' \notin E(C, D_1)$ ならば $C(a') = \bigcup_{i=1}^{m} C_i(a', a'_i)$ である．

命題 5.31 補題 5.30 と同じ仮定の下で考える．特殊化 $(a, c) \longrightarrow (a', c')$ に対して $a' \notin E(C, D_1)$ とする．また $b' \in C(a)$ とする．このとき $C(a)$ の点 b で

$$\mathrm{rk}(b/ac) = r \text{ かつ } (a, b, c) \longrightarrow (a', b', c')$$

を満たすものが存在する．

証明 F を (a, c) の軌跡とし，

$$C^* = \{(x, y, z) : (x, y) \in F \text{ かつ } (x, z) \in C\}$$

とおく．$C_1, \cdots, C_m$ を C^* の既約成分とし，どの C_i の射影も $E(C, D_1)$ に含まれていないとする．各 C_i の次元は少なくとも $\dim(F) + r$ である．(a, c) は F の一般点であり，$\dim(C_i(a, c)) \leq r$ である．よって $\dim(C_i) \leq \dim(F) + r$ である．したがって，$\dim(C_i) = \dim(F) + r$ である．

よって $C(a) = \bigcup_{i=1}^{m} C_i(a, c)$ である．補題 5.30 より，$C(a') = \bigcup_{i=1}^{m} C_i(a', c')$ である．$b' \in C_i(a', c')$ であるような i を 1 つ固定する．b を $C_i(a, c)$ の一般点とする．C_i が既約閉集合であり，(a, c, b) が C_i の一般点なので，$(a, b, c) \longrightarrow (a', b', c')$ である． □

系 5.32 補題 5.30 と同じ状況を仮定する．D_1 の一般点 a に対して $C(a)$ が有限集合であるとする．このとき，$a' \in D_1$ かつ $a' \notin E(C, D_1)$ ならば，$|C(a')| \leq |C(a)|$ である．

定義 5.33 $C \subseteq S = D^n$ を既約閉集合とし $\dim(C) = k$ とする．既約閉集合 $G \subseteq S \times S$ で $\mathrm{codim}_{S \times S}(G) = \dim(C)$ かつ $\Delta_C = \{(a, a) : a \in C\}$ が点 (p, p) を通る，$G \cap (C \times C)$ の唯一の既約成分であるとき，$p \in C$ を**正則点**という．

定義 5.34 (1) 点 a' が，a' を含む最小の既約閉集合の正則点であるとき，特殊化 $a \longrightarrow a'$ を**正則**であるという．

(2) **良い特殊化**を次のように再帰的に定義する．

(a) 正則な特殊化は，良い特殊化である．

(b) $a = (a_1, a_2, a_3)$, $a' = (a'_1, a'_2, a'_3)$ とし $a \longrightarrow a'$ とする．

- $(a_1, a_2) \longrightarrow (a'_1, a'_2)$ は良い特殊化である，
- $a_1 \longrightarrow a'_1$ は同型写像である，
- $a_3 \in \mathrm{acl}(a_1)$

が成り立つとき，$a \longrightarrow a'$ は良い特殊化である．

ザリスキー幾何の特殊化に関しては，以下の性質が成り立つ (証明は略す)．

補題 5.35　(1) (a) $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(a')$ ならば，$a \longrightarrow a'$，(b) $a \longrightarrow a'$ かつ $a' \longrightarrow a''$ ならば $a \longrightarrow a''$，(c) I, J を添え字集合，$a = (a_i : i \in I)$, $\iota : I \longrightarrow J$, $a\iota = (a_{\iota(i)} : i \in I)$ とする．$a \longrightarrow a'$ ならば $a\iota \longrightarrow a'\iota$．(d) a, $a' \in D$ をそれぞれ 1 点集合，a を一般点とすると，$a \longrightarrow a'$．

(2) $a \longrightarrow a'$ かつ $\mathrm{tp}(a) \neq \mathrm{tp}(a')$ ならば，$\mathrm{rk}(a) > \mathrm{rk}(a')$．

(3)(次元定理) $a \longrightarrow a''$ とする．$a(1), a(2) \in D$ かつ $a(1) \neq a(2)$ で，さらに $a''(1) = a''(2)$ とする．このとき，$a \longrightarrow a' \longrightarrow a''$ となる a' で $a'(1) = a'(2)$ かつ $\mathrm{rk}(a \longrightarrow a') = 1$ となるものが存在する．

(4) $(a_i : i \in I)$ を b 上独立かつ一様な列とする．$(a'_i : i \in I)$ を b' 上一様な列で，各 $i \in I$ について $a_ib \longrightarrow a_ib'$ であるとする．さらに，$\mathrm{rk}(b \longrightarrow b') \leq 1$ かつ $b \longrightarrow b'$ は良い特殊化とする．このとき，$(ba_i :\in I) \longrightarrow (ba'_i : i \in I)$ である．

(5) $a \longrightarrow a'$ を良い特殊化で $\mathrm{rk}(a \longrightarrow a') \leq 1$ とする．このとき任意の特殊化 $ab \longrightarrow a'b'$ と $ac \longrightarrow a'c'$ を合成することができる．すなわち a 上独立な b^*, c^* で $\mathrm{tp}(b^*/a) = \mathrm{tp}(b/a)$, $\mathrm{tp}(c^*/a) = \mathrm{tp}(c/a)$ かつ $ab^*c^* \longrightarrow a'b'c'$ となるものが存在する．

(6) H を定義可能な階数 1 の可換群とする．a_i $(i \in I)$ を H の元とし $\sum_{i \in I} a_i = 0$ であるとする．$(a_i) \longrightarrow (a'_i)$ で各 a'_i は H の一般点だとすると，$\sum a'_i = 0$ である．特に，$a + b = c + d$, $(abcd) \longrightarrow (a'b'c'd')$ かつ a', b', c', d' が H の一般点のとき，$a' = c'$ ならば $b' = d'$ である．

(7) $aa' \longrightarrow bb'$ とする．$a \longrightarrow a'$ と $b \longrightarrow b'$ はそれぞれ正則な特殊化で a と a'

は独立であるとする．このとき，$aa' \longrightarrow bb'$ も正則な特殊化である．

a が D または，階数 1 の定義可能群の一般点ならば，特殊化 $a \longrightarrow a'$ は常に正則である．また，同型写像は正則な特殊化である．

5.2.3 ザリスキー幾何と仮想元消去について

ザリスキー幾何は，残念ながら仮想元を消去しない．反例を紹介しよう．

K を代数的閉体とする．C を種数 1 以上の，滑らかな射影曲線とする．滑らかな代数曲線として，C はザリスキー幾何になっている．

命題 5.36 ザリスキー幾何としての C は，仮想元を消去しない．

証明 C から $\mathbb{P}^1$ の上への，非自明な射影 π が存在する．この π を用いて C に同値関係 E を次のように定義する．

$$xEy \Longleftrightarrow \pi(x) = \pi(y)$$

このとき $C/E = \mathbb{P}^1$ である．もし C が仮想元を消去するならば，$\mathbb{P}^1$ のあるザリスキー開集合から C^n への有理写像が存在する．C^n から C への適当な写像と組み合わせると，$\mathbb{P}^1$ のザリスキー開集合から C の上への有理写像が存在する．この写像を $\mathbb{P}^1$ 全体から C の上への射に拡大することができる．しかし，$\mathbb{P}^1$ の種数は 0 で，C の種数は 1 以上だから矛盾する． □

ただし以下に説明するように，ザリスキー幾何は**仮想元を弱い意味で消去する．**

定義 5.37 H を n 次置換群，すなわち n 次対称群 $\mathrm{Sym}(n)$ の部分群とする．$\bar{a}, \bar{b} \in D^n$ に対して，$\sigma(\bar{a}) = \bar{b}$ となる $\sigma \in H$ が存在するとき，$\bar{a} \sim_H \bar{b}$ と定めると，$\sim_H$ は同値関係である．$S_H = D^n / \sim_H$ とおく．S_H の元を，置換群 H による**特殊仮想元**と呼ぶ．

補題 5.38 (Lascar-Pillay) D を強極小集合とし，$\mathrm{acl}(\varnothing)$ は無限集合であるとする．任意の仮想元 $e \in D^{\mathrm{eq}}$ に対して，置換群 H と H による特殊仮想元 $e' \in S_H$ が存在して，$\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(e) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(e')$ である．

証明 E をパラメーターなしで定義可能な同値関係とし，$e = (a_1, \cdots, a_n)/E$ とする．ここで各 a_i は D の元である．

主張： 各 i に対して $a_i \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(e)$ である．必要ならば番号を付け替えることとして，$a_1, \cdots, a_j \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(e)$ で a_{j+1} 以降は $\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(e)$ に入っていないとする．$j < n$ とすると矛盾することを示す．D は強極小だから，D から有限個の元を除いた任意の x_{j+1} に対して

$$e = (a_1, \cdots, a_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_n)/E$$

であるような $x_{j+2}, \cdots, x_n$ が存在する．よって $a'_{j+1} \in \mathrm{acl}(\varnothing) \cap D$ であるような元が存在して，うまく $a'_{j+2}, \cdots, a'_n$ をとれば

$$e = (a_1, \cdots, a_j, a'_{j+1}, a'_{j+2}, \cdots, a'_n)/E$$

である．$a'_{j+1} \in \mathrm{acl}(e)$ だから j の最大性に反する．よって $j = n$ でなければならない．(主張の証明終わり)

$\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in D^n$ とする．C を e 上で $\bar{a}$ と共役な元全体とする．任意の $\bar{b} \in C$ に対して $e = \bar{b}/E$ なので，e 上の C の共役は C 自身である．よって $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(e) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(C)$ である．

$\bar{a} \in C$ は e 上代数的だから，ある正整数 m に対して $|C| = m$ である．

$$\mathcal{F} = \{X \subset D^n : |X| = m\}$$

とおいて，$C \in \mathcal{F}$ と考える．H を m 次対称群とすると，$\mathcal{F}$ を $(D^n)^m/H$ と同一視することができる．H を $n \cdot m$ 次対称群 $\mathrm{Sym}(n \cdot m)$ の部分群と考えれば，$e \in S_H$ と考えることができる．　□

注意 5.39　M を構造とする．$e \in M^{\mathrm{eq}}$ に対して，$\bar{b} \in M^n$ が存在して，$e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\bar{b})$ かつ $\bar{b} \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(e)$ であるとき，M は仮想元を消去する．$e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\bar{b})$ だが $\bar{b} \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(e)$ であるとき，M は仮想元を弱い意味で消去するという．$\mathrm{acl}(\varnothing)$ が無限集合であるような強極小集合が，仮想元を弱い意味で消去することを主張するのが補題 5.38 である．論法は補題 1.52 と同じである．

D をザリスキー幾何，H を n 次置換群とする．D^n の位相を用いて，S_H に位相を次のように導入する．$\pi_H : D^n \longrightarrow S_H$ を標準射影とする．$\pi_H^{-1}(X)$ が D^n で閉集合であるとき，$X \subseteq S_H$ は閉集合であると定義する．この方法で S_H にネーター位相が入る．$X \subseteq D^n$ を閉集合とする．

$$\pi_H^{-1}(\pi_H(X)) = \bigcup_{\sigma \in H} \sigma X$$

なので，$\pi_H(X) \subseteq S_H$ は閉集合である．よって標準射影 π_H は閉写像である．

補題 5.40　D をザリスキー幾何，H を n 次置換群とする．S_H でも次元定理が成り立つ．すなわち，$C_1, C_2 \subseteq S_H$ をそれぞれ既約閉集合とし $\dim(C_i) = n_i$ とする．$C_1 \cap C_2$ が空でなければ，$C_1 \cap C_2$ の任意の既約成分 C に対して

$$\dim(C) \geq d_1 + d_2 - n$$

である．

証明　標準射影 π_H を単に π と書く．$i = 1, 2$ に対して，$\pi^{-1}(C_i)$ の既約成分 D_i で $\pi(D_i) = C_i$ となっているものをとる．$x \in C_1 \cap C_2$ ならば，$x = \pi(y_1) = \pi(y_2)$ となる $y_1 \in D_1, y_2 \in D_2$ が存在する．よって $\sigma(y_2) = y_1$ となる $\sigma \in H$ が存在する．つまり $y_1 \in D_1 \cap \sigma D_2$ である．したがって $C_1 \cap C_2 \subseteq \bigcup_\sigma \pi(D_1 \cap \sigma D_2)$ である．集合 $\{D_1 \cap \sigma D_2 : \sigma \in H\}$ に属する各 $D_1 \cap \sigma D_2$ の既約成分をすべて集めたものを $\{Y_i\}$ とおく．各 Y_i は D^n の既約閉集合だから，D^n の次元定理から $\dim(Y_i) \geq d_1 + d_2 - n$ である．よって πY_i も既約閉集合で，$\dim(\pi Y_i) \geq d_1 + d_2 - n$ である．$C_1 \cap C_2 \subseteq \bigcup_i \pi Y_i$ だから，$C_1 \cap C_2$ の既約成分は，$\{\pi Y_i\}$ の中のどれかと等しい．したがって既約成分 C に対しても，$\dim(C) \geq d_1 + d_2 - n$ が成り立っている．　□

系 5.41　D をザリスキー幾何，H を n 次置換群とする．S_H もザリスキー幾何である．

5.2.4　ザリスキー幾何における多様体

ザリスキー幾何 D に対して D-多様体というものを定義したい．代数幾何における多様体同様，アフィン多様体に相当するものを定義し，それらを貼り合わせて D-多様体を構成する．

定義 5.42　D をザリスキー幾何とする．集合 X は次の性質を持つとき，D-多様体と呼ばれる．

(1) $\bigcup_i g_i U_i = X$,

(2) 各 U_i はそれぞれ或る特殊仮想元の既約な正則集合,

(3) 各 i, j に対して集合

$$\{(x,y) \in U_i \times U_j : g_i x = g_j y\}$$

は，既約閉集合でそれぞれ U_i, U_j の空でない開集合の上に射影される．

X が多様体のとき，

$$\mathcal{O} = \{W \subseteq X : \text{各 } i \text{ について } g_i^{-1}W \text{ は } U_i \text{ の開集合 }\}$$

を X の開集合系とすることによって，X に位相を定義することができる．しかも，g_i が U_i と g_iU_i の間の同相写像になっているようにできる．この位相の定義によって，X は既約なネーター空間になる．また，X の次元は，各 U_i の次元と等しいことも分かる．

X, X' が D-多様体のとき，$U_i \times U_i'$ を張り合わせることによって $X \times X'$ を多様体にすることができる．よって上と同じようにして，$X \times X'$ に位相を定義することができる．特に，X が多様体のとき，各 X^n に，既約なネーター位相が定義される．

定義 5.43　X_1, X_2 を D-多様体とする．写像 $\alpha : X_1 \longrightarrow X_2$ は，α のグラフが $X_1 \times X_2$ の既約閉集合であるとき，**射**と呼ばれる．

射に関する基本事項をまとめておく (証明略).

補題 5.44　(1) U, V を多様体，$f : U \longrightarrow V$ を射とする．このとき f は連続である．

(2) $f_i : U_i \longrightarrow V_i$ を射とする (ただし，$i = 1,2$)．このとき，$f(u_1,u_2) = (f_1(u_1), f_2(u_2))$ によって $f : U_1 \times U_2 \longrightarrow V_1 \times V_2$ を定義すると，f は射である．

(3) 射の合成は射である．

命題 5.45　G をザリスキー幾何 D で定義可能な群とする．このとき，G の 2 項演算 $G^2 \longrightarrow G$ と，$g \in G$ に対して g の逆元を与える写像の双方を射にするような，多様体の構造を G に与えることができる．

注意 5.46　「代数的閉体上で定義可能な群は代数群と同型である．さらに同型写像も定義可能であるようにすることができる」という有名な定理 (Weil-van den Dries-Hrushovski) がある (Theorem 4.11 [34], p.78 参照)．上の命題は，この定理

のザリスキー幾何版に他ならない．この命題は，後に豊富なザリスキー幾何において体を翻訳するときに用いられる．

命題 5.47 F を，定義可能な体の構造を持つ多様体とする．加法が F^2 から F への射になっているとすると，乗法もやはり F^2 から F への射になっている．

証明 F^3 の開集合 U と閉集合 M が存在して，

$$\overline{U} = F^3 \text{ かつ } M = U \cap (\text{乗法のグラフ})$$

である．閉集合 M は既約であると仮定してよい．特に F^2 の一般点 (x, y) に対して，$(x, y, z) \in M$ ならば $(x, y, z) \in U$ である．よって F^2 の一般点 (x, y) に対して，$(x, y, z) \in M$ となる z が唯一存在する．もちろん $z = xy$ である．U_2 を F^2 の開集合で

$$\Big((x, y) \in U_2 \Longrightarrow (x, y, xy) \in M\Big) \text{ かつ } \Big((x, y, z) \in M \Longrightarrow z = xy \ (z \text{ は任意})\Big)$$

が成り立っているとする．M が閉集合で，(乗法のグラフ)$\cap(U_2 \times F) = M$ だから，乗法は U_2 から F への射である．

$c = (c_1, c_2) \in F^2$ とする．

$$U_2 - c = \{(x, y) \in F^2 : (x + c_1, y + c_2) \in U_2\}$$

とおく．F^2 は $2\dim(F) + 1$ 個の $U_2 - c$ たちの和集合になっている．

任意の $c \in F$ に対して，$\{(x, y) : cx = y\}$ は閉集合である．よって一般点を掛けるという演算は射である．$c = (c_1, c_2) \in F^2$ に対して，$f : (U_2 - c) \longrightarrow F$ を，$f(x, y) = (x + c_1)(y + c_2)$ によって定義する．f は $(x, y) \longrightarrow (x + c_1, y + c_2)$ という射と，乗法を $U_2 \times F$ に制限した射の合成である．よって f も射である．

$a, b \in F$ を任意な元とする．$ab = (a + c_1)(b + c_2) - c_1 b - c_2 a - c_1 c_2 = f(a, b) - c_1 b - c_2 a - c_1 c_2$ である．よって $c = (c_1, c_2)$ を一般点とすれば，加法が射だから乗法は $U_2 - c$ 上の射になっている．F^2 は有限個の $U_2 - c$ たちで覆われ，乗法は各 $U_2 - c$ 上の射だから，F の乗法は射である． □

5.3　豊富なザリスキー幾何と体

この節では豊富なザリスキー幾何という概念を定義し，そのような構造の中に体が翻訳されることを示す．基本戦略はこうである．ザリスキー幾何は強極小集合としての構造を持っている．豊富なザリスキー幾何は，非局所モジュラーな幾何を持っているのでそのことを利用して，強極小集合に作用する Morley 階数 2 の群を定義する．そうすると，定理 4.31 から代数的閉体を翻訳することができる．

したがって重要なのは，Morley 階数 2 の群が定義できるような群図表を見出すことである．基本的考え方は代数曲線族から代数的閉体を定義したときと同じである．あの場合は，加法が与えられていたので，各曲線のある点，例えば原点における傾きを用いて乗法を定義した．今回は，加法すら与えられていないので，まず加法を定義しさらにその加法を用いて乗法を定義するという 2 段階戦術を用いる．

各段階で群図表の存在を示さなければならないが，階数一様行列というものを定義し，階数一様行列から群図表が得られることを示す．

乗法を定義する際に，曲線の傾きといった概念が存在しないのでまず「形式的微分」のような概念を定義する．そのときに用いられるのがザリスキー幾何の**特殊化**である．

ザリスキー幾何を強極小集合とみると,「自明」,「局所モジュラー」あるいは「非局所モジュラー」のいずれかである．非局所モジュラーなザリスキー幾何を**豊富なザリスキー幾何**と呼ぶ．局所モジュラーな強極小集合は可換群を翻訳する (定理 4.28) ことを思い出そう．したがってまず非局所モジュラーなザリスキー幾何も可換群を翻訳することを示す．

階数一様行列と呼ばれる列を定義する．ちょうど行列のように，縦，横に要素を並べたものである．

定義 5.48　T を理論，$\mathfrak{M}$ を万有モデルとし，$\mathfrak{M}$ の元からなる一種の行列 $f = (f_{ij} : i \in I, j \in J)$ を考える．$i_1 < \cdots < i_n$, $j_1 < \cdots j_m$ である限り，上の行列の中からどのように要素 $f_{i_\mu j_\nu}$ をとっても $\mathrm{tp}(f_{i_\mu j_\nu} : 1 \leq \nu \leq n,\ 1 \leq \mu \leq m)$ の階数が行の個数 n と列の個数 m だけによって決まるとき，f を階数一様行列という．大きさ $n \times m$ の小行列の タイプが，f のどこを取っても同じ階数 $\alpha(n, m)$ を持つとき，f を α-型の階数一様行列と呼ぶ．通常は 1 次元的に書く Morley 列を，下のように 2 次元的に書いたものである．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & f_{i_1 j_1} & \cdots & f_{i_1 j_\nu} & \cdots & f_{i_1 j_m} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & f_{i_\mu j_1} & \cdots & f_{i_\mu j_\nu} & \cdots & f_{i_\mu j_m} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & f_{i_n j_1} & \cdots & f_{i_n j_\nu} & \cdots & f_{i_n j_m} & \cdots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

定理 5.49　D をザリスキー幾何，$f = (f_{ij} : i, j < \omega)$ を D の元からなる α-型の階数一様行列とする．

(1) $\alpha(n, m) = m + n - 1$ のときは，1 次元の定義可能な群 $(A, +)$ が存在する．また各 i, j について

$$\mathrm{acl}(f_{ij}) = \mathrm{acl}(a_i + a^j)$$

が成り立つような a_i, $a^j \in A$ が存在する．

(2) $\alpha(n, m) = 2m + n - 2$ $(m \geq 2,\ n \geq 2)$ のときは，定義可能な体 $(F, \cdot, +)$ が存在する．また，各 i, j について

$$\mathrm{acl}(f_{ij}) = \mathrm{acl}(a_i \cdot c_j + b_i)$$

が成り立つような，F の独立な元たち a_i, b_i, c_j が存在する (次元 2 の定義可能な群 G と，1 次元の定義可能な集合 X，さらに G による X の上への定義可能な作用が存在し，これら作用全体に体の構造が入る)．

(3) $\alpha(n, m) = 3m + n - 3$ $(m \geq 2,\ n \geq 3)$ のときは，次元 3 の定義可能な群 G，1 次元の定義可能集合 X，さらに G による X の上への，定義可能な作用が存在する．また，各 i, j について

$$\mathrm{acl}(f_{ij}) = \mathrm{acl}(g_i \cdot a^j)$$

が成り立つような，G の独立な元たち g_i と X の独立な元たち a^j が存在する (これら以外の可能性はない)．

注意 5.50　強極小集合に作用する ω-安定群に関する Hrushovski の基本定理 4.31 と対比してほしい．

証明に入る前に，まず一般的に成り立つ性質を 1 つ補題として証明しておく．

補題 5.51　$\mathrm{rk}(c/d_1d_2) = \mathrm{rk}(c/d_1) = \mathrm{rk}(c/d_2)$ とする．つまり，$c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits_{d_1} d_2$ かつ $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits_{d_2} d_1$ とする．このとき $\mathrm{rk}(c/d_1d_2) = \mathrm{rk}(c/e)$ となる $e \in \mathrm{acl}(d_1) \cap \mathrm{acl}(d_2)$ が存在する．

証明　$E = \mathrm{acl}(d_1) \cap \mathrm{acl}(d_2)$ とおく．ザリスキー幾何 D では $\mathrm{acl}(\varnothing)$ が無限集合なので E は無限集合であることに注意する．d_1d_2 から独立な $c_1, \cdots, c_k$ をとり $c = (c_1, \cdots, c_k, c_{k+1}, \cdots, c_m) \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(c_1, \cdots, c_k, d_1d_2)$ とする．$\mathrm{rk}(c/d_1d_2) = k$ である．仮定から $\mathrm{rk}(c/d_1) = \mathrm{rk}(c/d_2) = k$ なので，

$$c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits_{d_1} d_1d_2 \Longrightarrow c_1 \cdots c_k c_{k+1} \cdots c_m \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits_{d_1} d_1d_2$$
$$\Longrightarrow c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits_{d_1c_1\cdots c_k} d_1d_2c_1\cdots c_k$$

に注意すると，

$$c \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(c_1, \cdots, c_k, d_1, E) \text{ かつ } c \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(c_1, \cdots, c_k, d_1, E)$$

であることが分かる．よって

$$c \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(c_1, \cdots, c_k, E) \tag{$*$}$$

を示せば，$\mathrm{rk}(c/e) = k$ となる $e \in E$ が存在する．$(*)$ を $(\mathrm{rk}(d_1/E), \mathrm{rk}(d_2/E))$ に関する帰納法で証明する．

$\mathrm{rk}(d_1/E) = \mathrm{rk}(d_2/E) = 0$ のときは，

$$\mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(c_1, \cdots, c_k, d_1, E) = \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(c_1, \cdots, c_k, d_2, E)$$
$$= \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(c_1, \cdots, c_k, E)$$

なので成り立つ．

$\mathrm{rk}(d_2/E) = r > 0$ の場合．$d \in D \backslash E$ を $d \in \mathrm{acl}(d_2)$ であるようにとる．このとき，有限個を除くすべての $d' \in (D \backslash E) \cap \mathrm{acl}(d_2)$ に対して d_2' が存在して，

(1) $\mathrm{rk}(d_2'/d'E) < r$,

(2) $c \in \mathrm{acl}^{\mathrm{eq}}(c_1, \cdots, c_k, d_2', E)$,

が成り立つ．これは，$\mathrm{rk}(d_2/dE) < r$ かつ $c \in \mathrm{acl}(c_1, \cdots, c_k, d_2, E)$ であり，これら 2 つが成り立っていることは，ザリスキー幾何が強極小集合であることから定義可能，すなわち論理式で書けているからである．よって $d' \in \mathrm{acl}(d_2)\backslash E$, d_2' を上の (1), (2) を満たす元とする．さらに $d_2' \downarrow_{Ecd_2} d_1$ が成り立つように d_2' を取ることができる．仮定により $c \downarrow_{d_2} d_1$ なので $c \downarrow_{Ed_2} d_1$ である．よって $Ecd_2 \downarrow_{Ed_2} d_1$ である．したがって，

$$\begin{aligned} d_2' \downarrow_{Ecd_2} d_1 \text{かつ } c \downarrow_{Ed_2} d_1 &\Longrightarrow d_2' \downarrow_{Ecd_2} d_1 \text{かつ } Ecd_2 \downarrow_{Ed_2} d_1 \\ &\Longrightarrow d_2' \downarrow_{Ed_2} d_1 \end{aligned}$$

である．よって

$$\mathrm{acl}(d_2'E) \cap \mathrm{acl}(d_1E) \subseteq \mathrm{acl}(d_2E) \cap \mathrm{acl}(d_1E) = E$$

が成り立つ．(2) と帰納法の仮定から，$c \in \mathrm{acl}(c_1, \cdots, c_k, E)$ となる． □

この補題 5.51 を用いて定理 5.49 を証明する．

5.3.1 階数一様行列が存在すれば，群図表が存在する

定理 5.49 の (3)，すなわち，$\alpha(n,m) = 3m + n - 3$ 型の階数一様行列が与えられたとして，Morley 階数 3 の群を定義する．

そのために，群図表 $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ が存在することを示す．必要ならば，D の初等拡大で議論することにより与えられた階数一様行列 $f = (f_{ij} : i, j \in \omega)$ を拡張して $f = (f_{ij} : i, j \in \mathbb{Z})$ だとしてよい．

$$\begin{array}{cccccc} \cdots & f_{1,-3} & f_{1,-2} & f_{1,-1} & f_{1,0} & \cdots \\ \cdots & f_{2,-3} & f_{2,-2} & f_{2,-1} & f_{2,0} & \cdots \end{array}$$

の部分に着目し，

$$\begin{aligned} b_1 &= (f_{1,-3}, f_{1,-2}, f_{1,-1}), \qquad & a_3 &= f_{1,0} \\ b_3 &= (f_{2,-3}, f_{2,-2}, f_{2,-1}), \qquad & a_1 &= f_{2,0} \end{aligned}$$

とおく．a_2 と b_2 をうまく選んで，$(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ が群図表になるようにしたい．まず次のことが成り立つことを証明する．

(1) $\mathrm{rk}(a_2)=1$ であるような $a_2 \in \mathrm{acl}(b_1a_3) \cap \mathrm{acl}(b_3a_1)$ が存在する.

(2) $\mathrm{rk}(b_2)=3$ かつ $\mathrm{rk}(a_1a_3/b_2)=1$ であるような $b_2 \in \mathrm{acl}(b_1b_3)$ が存在する.

(1) の証明　$y=(f_{3,-3},\cdots,f_{3,0})$ とおく．階数一様行列を定義するときに，$\mathrm{rk}(y) = 4$ が成り立つようにしておく．つまり各行は階数 1 の元からなる独立な列であるようにしておき，各行から 4 つの元をとると，4 つの元の組の階数はどこでも 4 になるようにしておく．

まず，

$$\mathrm{rk}(b_1a_3b_3a_1)=\alpha(2,4) \text{ かつ } \mathrm{rk}(yb_1a_3b_3a_1)=\alpha(3,4)$$

であることに注意する．よって

$$\begin{matrix} f_{1,-3} & f_{1,-2} & f_{1,-1} & f_{1,0} \\ f_{2,-3} & f_{2,-2} & f_{2,-1} & f_{2,0} \\ f_{3,-3} & f_{3,-2} & f_{3,-1} & f_{3,0} \end{matrix}$$

という 3×4 型行列で考えると，

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}(y/b_1a_3b_3a_1) &= \alpha(3,4)-\alpha(2,4) \\ &= (3\cdot 3+4-3)-(3\cdot 2+4-3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

であることが分かる．同様にして

$$\begin{matrix} f_{1,-3} & f_{1,-2} & f_{1,-1} & f_{1,0} \\ f_{3,-3} & f_{3,-2} & f_{3,-1} & f_{3,0} \end{matrix}$$

という 2×4 型行列で考えると，

$$\mathrm{rk}(y/b_1a_3)=\mathrm{rk}(yb_1a_3)-\mathrm{rk}(b_1a_3)=\alpha(2,4)-4=3$$

である．$\mathrm{rk}(y/b_3a_1)=3$ も同様にして成り立つ．以上をまとめると，

$$\mathrm{rk}(y/b_1a_3)=\mathrm{rk}(y/b_3a_1)=\mathrm{rk}(y/b_1a_3b_3a_1)=3$$

が成り立っている．よって補題 5.51 より，$\mathrm{rk}(y/a_2)=3$ であるような $a_2 \in \mathrm{acl}(b_1a_3) \cap \mathrm{acl}(b_3a_1)$ が存在する．$\mathrm{rk}(y)=4$ なので

$$\mathrm{rk}(y/a_2) = \mathrm{rk}(ya_2) - \mathrm{rk}(a_2) = 3$$

より $\mathrm{rk}(a_2) \geq 1$ である．

$$\begin{aligned}3 \cdot 2 + 1 - \mathrm{rk}(a_2) &= \mathrm{rk}(b_1a_3b_3a_1/a_2)\\ &\leq \mathrm{rk}(b_1a_3/a_2) + \mathrm{rk}(b_3a_1/a_2)\\ &= \mathrm{rk}(b_1a_3) + \mathrm{rk}(b_3a_1) - 2\mathrm{rk}(a_2)\\ &= (3+1)\cdot 2 - 2\mathrm{rk}(a_2)\end{aligned}$$

なので $\mathrm{rk}(a_2) \leq 1$ である．よって $\mathrm{rk}(a_2) = 1$ である．　□

(2) の証明　1 で考えた 3×4 行列の左の部分を考える．

$$\begin{matrix} f_{1,-6} & f_{1,-5} & f_{1,-4} & f_{1,-3} & f_{1,-2} & f_{1,-1} & f_{1,0} \\ f_{2,-6} & f_{2,-5} & f_{2,-4} & f_{2,-3} & f_{2,-2} & f_{2,-1} & f_{2,0} \\ & & & f_{3,-3} & f_{3,-2} & f_{3,-1} & f_{3,0} \end{matrix}$$

$b'_1 = (f_{1,-6}, f_{1,-5}, f_{1,-4})$, $b'_3 = (f_{2,-6}, f_{2,-5}, f_{2,-4})$ とおく．

$$\mathrm{rk}(a_1a_3/b_1b_3) = \mathrm{rk}(a_1a_3/b'_1b'_3) = \alpha(2,4) - \alpha(2,3) = 1$$

である．また，

$$\mathrm{rk}(a_1a_3/b_1b_3b'_1b'_3) = \alpha(2,7) - \alpha(2,6) = 1$$

である．よって補題 5.51 より，$\mathrm{rk}(a_1a_3/b_2) = 1$ であるような $b_2 \in \mathrm{acl}(b_1b_3) \cap \mathrm{acl}(b'_1b'_3)$ が存在する．よって，まず

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(b_1b_3b'_1b'_3/b_2) &= \mathrm{rk}(b_1b_3b'_1b'_3) - \mathrm{rk}(b_2)\\ &= \alpha(2,6) - \mathrm{rk}(b_2)\\ &= 9 - \mathrm{rk}(b_2)\end{aligned}$$

であることが分かる．つぎに，

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(b_1b_3b'_1b'_3/b_2) &\leq \mathrm{rk}(b_1b_3) + \mathrm{rk}(b'_1b'_3) - 2\mathrm{rk}(b_2)\\ &= \alpha(2,3) + \alpha(2,3) - 2\mathrm{rk}(b_2)\\ &= 12 - 2\mathrm{rk}(b_2)\end{aligned}$$

が得られる．したがって，$\mathrm{rk}(b_2) \leq 3$ である．実は $\mathrm{rk}(b_2) = 3$ である．もし $\mathrm{rk}(b_2) < 3$ だとすると矛盾することを示す．

$b_2 \in \mathrm{acl}(b_1 b_3)$ なので $\mathrm{rk}(a_1 a_3/b_2) = \mathrm{rk}(a_1 a_3/b_1 b_3) = 1$ である．よって階数一様行列の性質から，任意の自然数 n に対して，

$$\mathrm{rk}(f_{1,n} f_{2,n}/b_2) = 1$$

が成り立つ．ここで $b_1'' = (f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3})$, $b_3'' = (f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3})$ とおく．

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(b_1'' b_3''/b_2) &\leq \mathrm{rk}(f_{1,1} f_{2,1}/b_2) + \mathrm{rk}(f_{1,2} f_{2,2}/b_2) + \mathrm{rk}(f_{1,3} f_{2,3}/b_2) \\ &= 3\end{aligned}$$

したがって，もし $\mathrm{rk}(b_2) < 3$ だとすると

$$\mathrm{rk}(b_1'' b_3'') = \mathrm{rk}(b_1'' b_2''/b_2) + \mathrm{rk}(b_2) < 3 + 3$$

となる．しかし，$b_1'' b_3''$ は 2×3 行列になっているので $\mathrm{rk}(b_1'' b_3'') = \alpha(2,3) = 6$ でなければならない．よって $\mathrm{rk}(b_2) = 3$ でなければ矛盾する．　□

これで材料が揃ったので，$(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ が群図表になっていることを示す．そのためには，次のことを示さなければならない．

(1) $a_i \in \mathrm{acl}(a_j, b_k)$ ただし $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$,

(2) $b_i \in \mathrm{acl}(a_j, a_k)$ ただし $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$,

(3) $b_i \in \mathrm{acl}(b_j, b_k)$ ただし $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

(1) と (2) は，a_i, a_j, a_k のどの 2 つも互いに独立であること，b_i, b_j, b_k のどの 2 つも互いに独立であること，また a_i, a_j, a_k の任意の元と b_i, b_j, b_k の任意の元が互いに独立であること，および $\mathrm{rk}(a_j a_k/b_i) = 1$ であることから導かれる．

(3) の証明　取り方から $b_2 \in \mathrm{acl}(b_1, b_3)$ であるので，$b_1 \in \mathrm{acl}(b_2, b_3)$ と $b_3 \in \mathrm{acl}(b_1, b_2)$ を示す．

$$b_2 \in \mathrm{acl}(b_1, b_3) \backslash \mathrm{acl}(b_1) \Longrightarrow b_1 \in \mathrm{acl}(b_2, b_3)$$

に注意すれば，$b_2 \notin \mathrm{acl}(b_1)$ から $b_1 \in \mathrm{acl}(b_2, b_3)$ が導かれる．

よって $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ は群図表である．よって定理 4.31 より代数的閉体を翻訳できる．　□

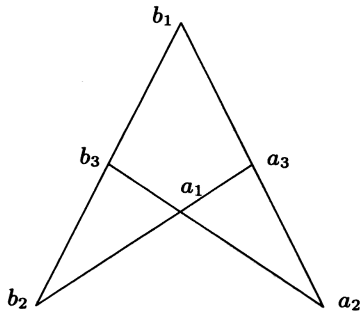


図 5.1　群図表

5.3.2　階数一様行列が存在する

体を定義するには Morley 階数 2 の群が必要である．

(1) 豊富なザリスキー幾何に，$\alpha(m,n) = m+n-1$ 型の階数一様行列を定義する．

(2) (1) で得られた階数一様行列から Morley 階数 1 の可換群を定義する．これを加法と考える．

(3) (2) で得られた加法を用いて，$\alpha(m,n) = 2m+n-2$ 型の階数一様行列を定義する．

(4) (3) で得られた階数一様行列から Morley 階数 2 の群を定義する．この群は強極小集合に作用しているので定理 4.31 から体が得られる．この体は ω-安定なので代数的閉体である．

注意 5.52　ザリスキー幾何の公理だけからは，(4) で得られる代数的閉体の標数を決定することはできない．群図表を用いて体を定義する場合，標数を決定するデータが欠けているからである．微分閉体において階数 1 の定義可能集合はザリスキー幾何を定義する．このザリスキー幾何が豊富な場合は体が定義されるが，この体は微分閉体の定義体と同型になることが知られている．しかも同型写像も定義可能である (系 5.78)．よってこの場合に定義される体の標数は 0 である．同様に，分離閉体において極小タイプを用いてザリスキー幾何が定義される場合は，定義される体の標数はもとの分離閉体の標数と一致する．

ここでは，上の (1) と (3) を証明する．いずれもザリスキー幾何が豊富であることと，特殊化の性質を利用する．

補題 5.53　$(A_{ij} : i \leq M, j \leq N)$ を階数一様行列 $(M, N \geq 2)$, $(A_{ij} : i, j) \longrightarrow (a_{ij} : i, j)$ を階数 1 の特殊化とする．つまり $\mathrm{rk}(A_{ij}) - \mathrm{rk}(a_{ij}) = 1$ が成り立っている．

(1) 2 行 ×2 列行列の階数は 4 で，2 行 ×1 列行列の階数は 3 である．すなわち $\mathrm{rk}(A_{i_1 j_1}, A_{i_1 j_2}, A_{i_2 j_1}, A_{i_2 j_2}) = 4$ かつ $\mathrm{rk}(A_{i, j_1}, A_{i, j_2}) = 3$ である，

(2) C, C' を隣接する 2 つの 2 行 ×1 列行列とすると，$\mathrm{rk}(\mathrm{dcl}(C) \cap \mathrm{dcl}(C')) = 2$ である，

(3) 任意の i, j, i', j' に対して，$\mathrm{tp}(a_{ij}/\mathrm{acl}(\varnothing)) = \mathrm{tp}(a_{i'j'}/\mathrm{acl}(\varnothing))$，かつ $\mathrm{rk}(\mathrm{tp}(a_{ij}/\varnothing)) = 1$ である，

(4) $(a_{ij} : i, j)$ の任意の 2 行 ×1 列行列の階数は 2 である．すなわち，$\mathrm{rk}(a_{ij_1}, a_{ij_2}) = 2$ である，

(5) $A_{ij} A_{i'j'} \longrightarrow a_{ij} a_{i'j'}$ は良い特殊化である，

が成り立っているとすると，$(a_{ij} : i, j)$ は $\alpha(m, n) = m + n - 1$ 型の階数一様行列である．

証明　**主張 1：** $\mathrm{rk}(a_{21}a_{22}/a_{11}a_{12}) \leq 1$ である．

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

$\mathrm{rk}(a_{21}a_{22}/a_{11}a_{12}) = 2$ と仮定して矛盾を導く．

仮定 4 より，$\mathrm{rk}(a_{11}a_{21}) = \mathrm{rk}(a_{12}a_{22}) = 2$ である．また $(A_{11}A_{12}A_{21}A_{22}) \longrightarrow (a_{11}a_{12}a_{21}a_{22})$ は階数 1 の特殊化なので，

$$\mathrm{rk}(a_{12}a_{22}a_{11}a_{21}) = \mathrm{rk}(A_{12}A_{22}A_{11}A_{21}) - 1 = 4 - 1 = 3$$

また

$$\mathrm{rk}(a_{12}a_{22}/a_{11}a_{22}) + \mathrm{rk}(a_{11}a_{21}) = \mathrm{rk}(a_{12}a_{22}a_{11}a_{21})$$

なので，$\mathrm{rk}(a_{12}a_{22}/a_{11}a_{21}) = 3 - 2 = 1$ である．階数一様行列 $(a_{ij} : i, j)$ では $\mathrm{stp}(a_{11}a_{21} = \mathrm{stp}(a_{21}a_{11})$ が成り立っているとしてよいことに注意して，新たな元

a_{10}, a_{20} を,

- $\mathrm{rk}(a_{10}a_{20}/a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}) = 1$,
- $\mathrm{stp}(a_{21}a_{11}a_{22}a_{12}) = \mathrm{stp}(a_{11}a_{21}a_{10}a_{20})$

となるように (ザリスキー幾何の中から) とる.

$$\begin{matrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

よって, 特殊化

$$a_{21}a_{11}a_{22}a_{12} \longrightarrow a_{11}a_{21}a_{10}a_{20} \tag{1}$$

が存在する. また, 階数一様行列 $(A_{ij} : i, j)$ の性質から $\mathrm{tp}(A_{11}A_{21}A_{12}A_{22}) = \mathrm{tp}(A_{21}A_{11}A_{22}A_{12})$ であるので

$$A_{11}A_{21}A_{12}A_{22} \longrightarrow A_{21}A_{11}A_{22}A_{12} \tag{2}$$

である. 仮定から特殊化

$$A_{21}A_{11}A_{22}A_{12} \longrightarrow a_{21}a_{11}a_{22}a_{12} \tag{3}$$

も存在する. (2), (3), (1) の順で特殊化を続けると, 特殊化

$$A_{11}A_{21}A_{12}A_{22} \longrightarrow a_{11}a_{21}a_{10}a_{20}$$

が得られる.

また仮定から, $A_{11}A_{21}A_{12}A_{22} \longrightarrow a_{11}a_{21}a_{12}a_{22}$ である. さらに仮定より, $A_{11}A_{21} \longrightarrow a_{11}a_{21}$ は良い特殊化であり, $\mathrm{rk}(a_{11}a_{21}) = \mathrm{rk}(a_{12}a_{22}) = 2$ かつ $\mathrm{rk}(A_{11}A_{12}) = 3$ なので,

$$A_{11}A_{12} \longrightarrow a_{11}a_{12}$$

は階数 1 の特殊化である. 特殊化の合成に関する補題 5.35 の (5) より,

- $\mathrm{rk}(A_{10}A_{20}/A_{11}A_{12}A_{21}A_{22}) = \mathrm{rk}(A_{12}A_{22}/A_{11}A_{21})$,
- $\mathrm{tp}(A_{10}A_{20}/A_{11}A_{21}) = \mathrm{tp}(A_{12}A_{22}/A_{11}A_{21})$,
- $(A_{ij} : i = 1,2,\ j = 0,1,2) \longrightarrow (a_{ij} : i = 1,2,\ j = 0,1,2)$, 特に $(A_{ij} : i = 1,2,\ j = 0,2) \longrightarrow (a_{ij} : i = 1,2,\ j = 0,2)$,

を満たすような $A_{10}A_{20}$ が存在する.

階数一様行列 (A_{ij}) に関する仮定から，

$$\mathrm{rk}(A_{12}A_{22}/A_{11}A_{21}) = 1 = \mathrm{rk}(A_{12}A_{22}/\mathrm{dcl}(A_{12}A_{22}) \cap \mathrm{dcl}(A_{11}A_{21}))$$

である．よって $\mathrm{rk}(A_{12}A_{22}/A_{10}A_{20}) = 1$ かつ $\mathrm{rk}(A_{10}A_{20}) = 3$ より

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_{10} & A_{12} \\ A_{20} & A_{22} \end{pmatrix} = 4$$

である．

$a_{10}a_{20}$ の選び方に注意して $\mathrm{rk}(a_{10}a_{20}a_{12}a_{22})$ を次のように計算する．まず，

$$a_{12}a_{22} \mathop{\smile}^{\mid}_{a_{11}a_{21}} a_{10}a_{20}$$

である．$\mathrm{rk}(a_{21}/a_{11}a_{12}a_{22}) = 1$ なので

$$a_{12}a_{22} \mathop{\smile}^{\mid}_{a_{11}} a_{21}$$

である．よって，

$$a_{12}a_{22} \mathop{\smile}^{\mid}_{a_{11}} a_{10}a_{20}$$

である．

一方，$\mathrm{rk}(a_{20}/a_{11}) = \mathrm{rk}(a_{12}a_{21}) = 1$ なので $\mathrm{rk}(a_{20}/a_{12}a_{22}) = 1$ である．また，$\mathrm{rk}(a_{10}/a_{20}a_{11}a_{21}) = \mathrm{rk}(a_{22}/a_{12}a_{21}a_{11}) = 1$ である．よって，

$$\mathrm{rk}(a_{10}a_{20}a_{12}a_{22}) = 4$$

である．よって特殊化

$$(A_{ij} : i = 1, 2,\ j = 0, 2) \longrightarrow (a_{ij} : i = 1, 2,\ j = 0, 2)$$

は同型写像になっている．しかしこれは $\mathrm{rk}(a_{11}a_{21}) \leq 2$ かつ $\mathrm{rk}(A_{12}A_{21}) = 3$ であることに反する．よって $\mathrm{rk}(a_{21}a_{22}/a_{11}a_{12}) \leq 1$ でなければならない．

主張 2： 主張 1 の証明と同様にして，

- 行に関する添え字の任意の集合 $*$ と $j \geq 2$ に関して，$\mathrm{rk}(a_{*,,j}/a_{*,<j}) \leq 1$,
- 列に関する添え字の任意の集合 $*$ と $i \geq 2$ に関して，$\mathrm{rk}(a_{i,*j}/a_{<i,*}) \leq 1$

が成り立つ．

主張 1 と 2 を繰り返せば，階数一様行列 $(a : i, j)$ の任意な $m \times n$ 行列の階数は

高々 $m+n-1$ であることが分かる．もし，ある $m \times n$ 行列の階数が $m+n-1$ より小さかったとする．この行列を $m=M$ かつ $n=N$ まで拡大したとすると，主張 1 と 2 から $(a_{ij} : i,\ j)$ 全体の階数は $M+N-1$ より小さいことになる．これは初めに $(A_{ij} : i,\ j) \longrightarrow (a_{ij} : i,\ j)$ の階数が 1 だと仮定したことに反する． □

補題 5.54　D を非自明なザリスキー幾何とすると D^{eq} に Morley 階数 1 の群 (したがって可解群) が定義される．

証明　非自明なザリスキー幾何は，局所モジュラーかそうでないかである．局所モジュラーな場合は，定理 4.28 から無限群が存在する．

よって局所モジュラーでないザリスキー幾何，すなわち豊富なザリスキー幾何に $\alpha(m,n)=m+n-1$ 型の階数一様行列を定義し，定理 5.49 から次元 1 すなわち Morley 階数 1 の群を得る．

D を豊富なザリスキー幾何とすると，定義から階数 2 の集合 E と $C \subseteq E \times D^2$ が存在して，各 $e \in E$ に対して，集合

$$C(e) = \{(a,b) \in D^2 : (e,a,b) \in C\}$$

の階数は 1 である．つまり各 $C(e)$ を平面曲線と考えている．平面上の点 (a,b) が曲線 $C(e)$ を通ること，すなわち $(a,b) \in C(e)$ を $C(e;a,b)$ と書くことにする．さらに，

- $C(e;a,b)$ かつ $C(e;a',b')$,
- $ab \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_e a'b'$,
- $ab \equiv_{\mathrm{acl}(\varnothing)} a'b'$，すなわち $\mathrm{tp}(ab/\mathrm{acl}(\varnothing)) = \mathrm{tp}(a'b'/\mathrm{acl}(\varnothing))$,
- e は E の一般点，すなわち $\mathrm{rk}(e)=2$

が成り立っているとき，$C(e;ab,a'b')$ と書く．独立な 2 点 (a,b), (a',b') を，曲線 $C(e)$ が通っている状態である．

主張 1： $C(e;ab,a'b')$ ならば $\mathrm{rk}(aba'b')=4$ である．

証明　$\mathrm{rk}(e/aba'b') < \mathrm{rk}(e/aba'b') < \mathrm{rk}(e) = 2$ より，$\mathrm{rk}(e/aba'b')=0$ である．よって

$$\mathrm{rk}(eaba'b') = \mathrm{rk}(e/aba'b') + \mathrm{rk}(aba'b') = \mathrm{rk}(aba'b')$$

である．したがって，$ab \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_e a'b'$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(aba'b') &= \mathrm{rk}(aba'b'e) = \mathrm{rk}(aba'b'/e) + \mathrm{rk}(e) \\ &= \mathrm{rk}(ab/e) + \mathrm{rk}(a'b'/e) + \mathrm{rk}(e) = 1+1+2=4\end{aligned}$$

である．　□

主張 2： $C(e; ab, a'b')$ ならば，$eaba'b' \longrightarrow eabab$ である．

証明　これは特殊化に関する補題 5.35 から得られる．　□

さて豊富なザリスキー幾何では，独立な 2 つの一般点 $p, q \in D^2$ を通る曲線が常に存在するので，次の性質をもつ独立な有限個の一般点 $a_0, \cdots, a_M, b_0, \cdots, b_M \in D$ が存在する（M はある自然数）．

任意の $i, j \geq 1$ に対して $C(e_{ij}; a_i b_j a_0 b_0)$ となる $e_{ij} \in E$ が存在する　(∗)

各 $i, j = 0, \cdots, M$ に対して，$A_{ij} = (a_i, b_j, e_{ij})$ とおき，$A = (A_{ij})_{0 \leq i, j \leq M}$ とおく．各 e_{ij} を A が階数一様行列になるようにとる．$\mathrm{rk}(e_{ij}/a_0 b_0 a_i b_j) = 0$ なので $e_{ij} \in \mathrm{acl}(a_0 b_0 a_i b_j)$ である．

主張 3： 階数一様行列 A は，補題 5.53 の仮定を満たしている．ただし階数は $a_0 b_0$ 上の相対的な階数とする．

証明　次の 3 つのことを示せばよい．

(1) A の 2×2 行列の階数は 4.

証明：$\mathrm{rk}(A_{i_1 j_1}, A_{i_1 j_2}, A_{i_2 j_1}, A_{i_2 j_2}) = \mathrm{rk}(a_{i_1} a_{i_2} b_{j_1} b_{j_2}) = 4$.

(2) A の 2×1 行列の階数は 3.

証明：$\mathrm{rk}(A_{i j_1}, A_{i j_2}) = \mathrm{rk}(a_i b_{j_1} b_{j_2}) = 3$.

(3) C, C' を A の隣接する 2×1 行列とすると $\mathrm{rk}(\mathrm{dcl}(C) \cap \mathrm{dcl}(C')) = 2$.

証明：例えば $\mathrm{rk}(\mathrm{dcl}(A_{11}A_{21}) \cap \mathrm{dcl}(A_{12}A_{22})) = 2$ を示す．$b_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{a_0 b_0 a_1 a_2} b_2$ なので

$$\mathrm{acl}(b_1 a_0 b_0 a_1 a_2) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{\mathrm{acl}(a_0 b_0 a_1 a_2)} \mathrm{acl}(b_2 a_0 b_0 a_1 a_2)$$

である．ゆえに

$$\mathrm{acl}(b_1 a_0 b_0 a_1 a_2) \cap \mathrm{acl}(b_2 a_0 b_0 a_1 a_2) = \mathrm{acl}(a_0 b_0 a_1 a_2)$$

したがって求める階数は，$\mathrm{rk}(a_0b_0a_1a_2/a_0b_0)=2$ に等しい．

よって階数一様行列 A は，補題 5.53 の仮定を満たしている． □

この A をすこし変形して $\alpha(m,n)=m+n-1$ 型の階数一様行列 A^* を段階的に定義する．

段階 1： 各 $j\geq 1$ に対して，

$$(a_i,b_j,e_{ij},a_0,b_0)\longrightarrow(a_i,b_1,e_{i1},a_0,b_0)$$

である．これは特殊化の性質から明らか．これを $(A_{ij},a_0,b_0)\longrightarrow(A'_{ij},a_0,b_0)$ と書く．よって補題 5.35 の (4) より

$$(A_{ij},a_0,b_0)_{i,j}\longrightarrow(A'_{ij},a_0,b_0)_{i,j}$$

である．これを $A\longrightarrow A'$ と書く．

段階 2： 各 $i\geq 1$ に対して，

$$(a_i,b_1,e_{i1},a_0,b_0)\longrightarrow(a_0,b_0,e_{i1},a_0,b_0)$$

である．また $(a_0,b_0,b_1)\in D^3$ が一般点なので，$a_0b_0b_1\longrightarrow a_0b_0b_0$ が階数 1 の良い特殊化である．さらに $(a_i,b_1,e_{i1},a_0,b_0)_i$ は $a_0b_0b_1$ 上独立かつ一様であり，$(a_0,b_0,e_{i1},a_0,b_0)_i$ が $a_0b_0b_0$ 上独立かつ一様であるので，補題 5.35 の (4) より，

$$(a_i,b_1,e_{i1},a_0,b_0)_i\longrightarrow(a_0,b_0,e_{i1},a_0,b_0)_i$$

である．これを $A'\longrightarrow A''$ と書く．

段階 3： $\alpha(m,n)=m+n-1$ 型の階数一様行列 A^* が存在する．

段階 1, 2 の結果から，$A\longrightarrow A''$ である．よって補題 5.35 の (3) より，$A^*=(A^*_{i,j})$, $A^*_{i,j}=(a^*_i,b^*_j,e^*_{i,j})$ が存在して，

- $A\longrightarrow A^*\longrightarrow A''$,
- $A\longrightarrow A^*$ は階数 1 の特殊化,
- $a^*_1=a_0$ が成り立つ．

$$(a^*_ib^*_je^*_{ij}a_0b_0)\longrightarrow(a_0b_0e_{i1}a_0b_0)\ \text{かつ}\ 3\geq\mathrm{rk}(a^*_1e^*_{ij})\geq\mathrm{rk}(a_0e_{i1})=3$$

なので，$\mathrm{rk}(a^*_1e^*_{ij})=3$ である．同様に $\mathrm{rk}(a^*_1b^*_je^*_{ij})=3$ である．よって $b^*_j\in\mathrm{acl}(a^*_1e^*_{ij})$ である．したがって，

$$rk(a_1^* b_j^* e_{ij}^* a_0 b_0) = \mathrm{rk}(a_1^* e_{ij}^* a_0 b_0) = \mathrm{rk}(a_0 e_{ij}^* a_0 b_0) = 3$$

である．よって特殊化 $(a_1^* b_j^* e_{ij}^* a_0 b_0) \longrightarrow (a_0 b_0 e_{i1} a_0 b_0)$ は同型写像になっている．したがって，各 j に対して，$b_j^* = b_0$ である．対称的な議論を行うと，各 i に対して $a_i^* = a_0$ であることが分かる．したがって各 i, j に対して

$$A_{ij}^* = (a_0 b_0 e_{ij}^*)$$

である．

さて $A^* \longrightarrow A''$ だから $(e_{ij}^* e_{i'j'}^* a_0 b_0) \longrightarrow (e_{i1} e_{i'1} a_0 b_0)$ である．よって $i \neq i'$ のとき，

$$\mathrm{rk}(e_{ij}^* e_{i'j'}/a_0 b_0) = \mathrm{rk}(e_{i1} e_{i'1}/a_0 b_0) = 2$$

より，$\mathrm{tp}(e_{ij}^* e_{i'j'}^*/a_0 b_0) = \mathrm{tp}(e_{i1} e_{i'1}/a_0 b_0)$ である．よって

$$\mathrm{stp}(e_{ij}^*/a_0 b_0) = \mathrm{stp}(e_{i'j'}^*/a_0 b_0)$$

である．$i = i'$ のときは，もちろん $\mathrm{stp}(e_{ij}^*/a_0 b_0) = \mathrm{stp}(e_{i'j'}^*/a_0 b_0)$ である．したがって $\mathrm{stp}(A_{ij}^*/a_0 b_0)$ は i, j に依存せず定まる．また $\mathrm{stp}(A_{ij}^*/a_0 b_0)$ の階数は 1 である．

よって階数 1 の特殊化 $A \longrightarrow A^*$ が良い特殊化であれば，補題 5.53 より，A^* は $\alpha(m, n) = m + n - 1$ 型の階数一様行列であることが分かる．

特殊化

$$(a_0, b_0, a_i, a_{i'}, b_j, e_{ij}, e_{i'j}) \longrightarrow (a_0, b_0, a_0, a_0, b_0, e_{ij}^*, e_{i'j}^*) \qquad (*)$$

が良い特殊化であることを示せばよい．まず，特殊化

$$(a_0, b_0, b_j, e_{ij}, e_{i'j}) \longrightarrow (a_0, b_0, b_0, e_{ij}^*, e_{i'j}^*) \qquad (**)$$

は，階数 1 の特殊化である．さらに

$$(a_0, b_0, e_{ij}, e_{i'j}) \longrightarrow (a_0, b_0, e_{ij}^*, e_{i'j}^*)$$

が同型写像であり，$b_j \longrightarrow b_0$ が正則な，階数 1 の特殊化であり，b_j が $(a_0, b_0, e_{ij}, e_{i'j})$ から独立なので，補題 5.35 の (7) より $(**)$ は正則である．

また，$(b_j, e_{ij}) \longrightarrow (b_0, e_{ij}^*)$ が同型写像かつ $a_i \in \mathrm{acl}(b_j, e_{ij})$ であることと，$(b_j,$

$e_{i'j}) \longrightarrow (b_0, e^*_{i'j})$ が同型写像かつ $a_{i'} \in \mathrm{acl}(b_j, e_{i'j})$ であることから，$(*)$ は良い特殊化である．

段階 4： 実は段階 3 だけでは不十分である．階数一様行列 A は，$M+1$ 個の一般点 $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \cdots, (a_M, b_M)$ をもとに定義され，A^* は 良い特殊化を用いて A から定義された．補題 5.53 を適用するには A がもう少し一般的な形をしていなければならない．そのために次のことを確認しておく．

(i) 最初に固定した M に対して $\mathrm{tp}(A^*/a_0b_0)$ について考える．A の a_0b_0 上の軌跡と，$a^*_1 = a^*_0$ に対応する対角線との共通部分の既約成分が，A^* の a_0b_0 上の軌跡になっている． そのような既約成分は有限個しかないので，$\mathrm{tp}(A^*/a_0b_0)$ の可能性は有限個しかない．

(ii) P_M を (i) で考えた有限個のタイプの和集合とする．コンパクト性定理により，無限列 $A^* = (A^*_{ij} : i, j = 1, 2, \cdots)$ で，A^* の任意の $m \times m$ 行列に対して P_m が成り立つようなものが存在する．A^* は一様であるように取れるから，この A^* を $\alpha(m, n) = m + n - 1$ 型の階数一様行列とすればよい． □

さていよいよ最後に，豊富なザリスキー幾何が体を翻訳することを示す．

定理 5.55 D を豊富なザリスキー幾何とすると，D^{eq} に代数的閉体が翻訳される．

証明 証明の基本的構造は，代数曲線族が与えられたときに，加法を利用して乗法を定義した定理 4.41 と同じである．

D が豊富なザリスキー幾何なので，D^{eq} は階数 1 の可換群 H を翻訳する．H は D-多様体と考えてよいので，H の演算は射であるとしてよい．H の演算を加法と考える．D が豊富であることから，パラメーター集合 E が存在して，各 $e \in E$ に対して，

$$C(e) \subseteq H \times H \text{ かつ } \mathrm{rk}(C(e)) = 2$$

とする．

a_i, b_i, b^j $(i, j = 0, 1, \cdots)$ を H の独立な一般点とし，$b_{ij} = b_i + b^j$ とおく．ここで，加法は H の演算である．$I = J = \{0, 1, \cdots\}$ とおく．D が豊富なザリスキー幾何なので各 $i, j \geq 1$ に対して，

$$C(e_{ij} : a_i b_{ij}, a_0 b_{00})$$

であるような $e_{ij} \in E$ が存在する．$A_{ij} = (a_i, b_{ij}, e_{ij})$ とおき，$A = (A_{ij})_{i,j \geq 1}$ とおく．$e_{ij} \in E$ をうまく選んで A が一様になるようにしておく．$e_{ij} \in \mathrm{acl}(a_i, b_j)$ なので，A の中の任意の $m \times n$-行列の階数は $2m + n - 1$ である．前回同様，この一様行列と階数 1 の特殊化をうまく定義して，$\alpha(m, n) = 2m + n - 2$ 型の階数一様行列 A^* を定義することができる．この A^* を用いて群図表を定義し，階数 2 の群が階数 1 の集合に作用している状況を導くことができるので，代数的閉体が翻訳されることになる．□

5.4　体の純粋性

豊富なザリスキー幾何に体が翻訳されることを前節で確認したが，ここではザリスキー幾何の中に翻訳される体の定義可能な集合は，すべて代数的であることを示す．

以後，豊富なザリスキー幾何の中で翻訳される代数的閉体を F で表す．

定義 5.56　通常のザリスキー位相を T_a，ザリスキー幾何による位相を T_b と書く．したがって T_a は代数的集合によって定義される位相であり，T_b はザリスキー幾何の公理系を満たすネーター位相によって定義される位相である．T_a-位相に関する閉集合を T_a-閉集合，T_b-位相に関する閉集合を T_b-閉集合という．他の位相的概念に関しても，区別が必要な場合は T_a, T_b を前に付けることにする．

T_a と T_b の関係を考えてみよう．最初はもちろん T_b しかなかったわけだが，T_b の各閉集合に対応する述語を持つ言語を考え，その言語に関して定義可能 (翻訳可能) な代数的閉体として F を構成した．代数的閉体では，モデル理論の意味での定義可能集合と代数幾何学の意味での構成的集合の概念は一致する．したがって F の意味で定義可能な集合で規定される通常のザリスキー位相 T_a の閉集合が，T_b-閉集合になるのは当たり前である．

問題はその逆である．T_b の閉集合が T_a でも閉集合であるかどうかはすぐには明らかではない．つまりザリスキー幾何の公理系で規定される閉集合が，代数的集合になっているかどうかは予め明らかではない．

ここでは，両者が一致すること，つまり T_a と T_b が一致することを示す．

5.4.1 射影空間

F 上の d-次元射影空間 $\mathbb{P}^d(F)$ の定義を復習しておこう．

$V = F^{d+1}$, $V' = F^{d+1}\backslash\{(\underbrace{0,\cdots,0}_{d+1\text{ 個}})\}$ とおく．V' に同値関係 $\sim$ を

$$(a_0,\cdots,a_d)\sim(b_0,\cdots,b_d)\Longleftrightarrow \exists\lambda\in F\backslash\{0\}\ (a_i=\lambda b_i\ (i=0,\cdots,d))$$

によって定義する．$\mathbb{P}^d_F = V'/\sim$ と書き，F 上の d 次元射影空間という．今後は，添え字の F を省略することが多い．$\mathbb{P}^d$ の点を，$(x_0:\cdots:x_d)$ で表す．$\theta : V' \longrightarrow \mathbb{P}^d$ を

$$\theta : (x_0,\cdots,x_d)\longmapsto(x_0:\cdots:x_d)$$

によって定める．θ は射である．

$\mathbb{P}^d$ の部分集合 U_j $(j=0,\cdots d)$ を

$$U_j = \{(a_0:\cdots:a_d) : a_j\neq 0\}$$

によって定義すると，$(a_0:\cdots:a_d)\in U_j$ のとき

$$(a_0:\cdots:a_d)=\left(\frac{a_0}{a_j}:\cdots:\frac{a_{j-1}}{a_j}:1:\frac{a_{j+1}}{a_j}:\cdots:\frac{a_d}{a_j}\right)$$

が成り立つ．写像 $\varphi_j : F^d \longrightarrow U_j$ を

$$\varphi_j : (a_1,\cdots,a_d)\longmapsto(a_1:\cdots:a_{j-1}:1:a_{j+1}:\cdots:a_d)$$

によって定義すると，各 U_j を d 次元アフィン空間 F^d と同一視することができる．さらに，U_j から U_k への同型射 φ_{jk} も自然に定義できる．このようにして $\mathbb{P}^d$ は $d+1$ 枚のアフィン空間 U_j を同型射 φ_{jk} で張り合わせた代数多様体と見ることができる．$\mathbb{P}^d$ は T_a で既約であるが，T_b に関しても既約であることに注意しよう．

さて，射影空間はよく知られているように T_a に関しては，**完備**である，すなわち X を多様体とすると，任意の T_a-閉集合 $C\subseteq X\times\mathbb{P}^n$ の射影は T_a-閉集合である．証明は例えば，D.Mumford の赤本 "*The Red Book of Varieties and Schemes*" (Lecture Notes in Mathematics 1358, Springer 1999) の 55 ページを見ていただきたい．本書の 1 章にも，正量記号消去の応用として 1.4.3 節で略証を与えてある．

5.4.2　弱完備性

ここでは，射影空間 $\mathbb{P}^n$ が T_b に関して，**弱完備性**を持っていることを示す．すなわち，任意の多様体 X に対して，T_b-閉集合 $C \subseteq X \times \mathbb{P}^n$ の X への射影が T_b の意味で稠密ならば，X 全体に射影されることを示す．その後でいくつかの応用について議論する．

命題 5.57　X を多様体，$C \subseteq X \times \mathbb{P}^n$ を閉集合とする．射影 $\pi : X \times \mathbb{P}^n \longrightarrow X$ に対して $\pi(C)$ が X で稠密ならば，$\pi(C) = X$ である．位相はすべて T_b で考える．

証明　C が既約だと仮定しても一般性を失わない．F を代数的閉体，$V = F^{n+1}, V' = F^{n+1} \backslash \{(\bar{0})\}$ とする．また写像 $\theta : V' \longrightarrow \mathbb{P}^n$ に対して，

$$X \times V' \ni (x, v) \longmapsto (x, \theta(v)) \in X \times \mathbb{P}^n$$

も 同じ θ と書くことにする．θ は射である．$\theta^{-1}(C)$ の $X \times V$ における閉包を C^* とおく．θ は射なので連続写像であり，$\theta^{-1}(C)$ は $X \times V$ の閉集合である．よって $C^* \cap (X \times V') = \theta^{-1}(C)$ である．

さて，$\alpha \in F, v \in V, x \in X$ に対して，$(x, \alpha v)$ を $\alpha \cdot (x, v)$ と書く．F を多様体とみなすことができて，加法と乗法が射なので，

$$\alpha : X \times V \longrightarrow X \times V$$

$$(x, v) \longmapsto (x, \alpha v)$$

は $X \times V$ から $X \times V$ 自身への射を定義し，$\alpha \in F^{\times} = F \backslash \{0\}$ のときは，同型射になる．任意の $(x, v) \in C^*$ と $\alpha \in F^{\times}$ に対し $(x, \alpha v) \in \theta^{-1}(C)$ である．よって

$$\theta^{-1}(C) \subseteq \alpha^{-1}(\theta^{-1}(C)) = \{(x, v) : (x, \alpha v) \in \theta^{-1}(C)\}$$

$$\subseteq \alpha^{-1}(C^*) = \{(x, v) : (x, \alpha v) \in C^*\}$$

が成り立っている．$\alpha^{-1}(C^*)$ は閉集合なので，$C^* \subseteq \alpha^{-1}(C^*)$ が分かる．よって $(x, v) \in C^*$ かつ $\alpha \in F^{\times}$ ならば，$(x, \alpha v) \in C^*$ である．

$\dim(C^*) = \dim(C) + 1$ である．$\mathcal{Z} = \{Z_1, \cdots, Z_m\}$ を，C^* の既約成分で次元が最大のものたち全部の集合とする．$Z \in \mathcal{Z}$ と $\alpha \in F^{\times}$ に対し，$\alpha^{-1}(Z) \in \mathcal{Z}$ である．よって，$F^{\times}$ の各元は集合 $\mathcal{Z}$ の置換を引き起こしている．

$$\mathrm{Fix}(\mathcal{Z}) = \{\alpha \in F^\times : \text{各 } Z \in \mathcal{Z} \text{ に対して } \alpha^{-1}(Z) = Z\}$$

によって $F^\times$ の部分群 $\mathrm{Fix}(\mathcal{Z})$ を定義すると，指数 $[F^\times : \mathrm{Fix}(\mathcal{Z})]$ は高々 $m!$ である．代数的閉体 F の乗法群は連結なので (Macintyre の定理 3.105 の証明参照)，$\mathrm{Fix}(\mathcal{Z}) = F^\times$ でなければならない．つまり，任意の $\alpha \in F^\times$ と $Z \in \mathcal{Z}$ に対して $\alpha^{-1}(Z) = Z$ が成り立っている．

$\mathcal{Z}$ の元 Z を 1 つ固定する．$\dim(Z) > \dim(X \times \{0\})$ なので，$\dim(Z \cap (X \times V')) = \dim(C) + 1$ である．よって $\theta(Z \cap (X \times V')) \subseteq X \times \mathbb{P}^n$ は C のなかで稠密である．よって仮定から $\pi(\theta(Z \cap (X \times V')))$ は X の中で稠密である．

$a \in X$ を一般点とする．$Z(a) = \{y \in V' : (a, y) \in Z\}$ とおき，$b \in Z(a)$ を任意の元とする．Z は $F^\times$ の元で不変なので，任意の $\alpha \in F^\times$ に対して，$\alpha Z = Z$ である．$b \in (\alpha Z)(a)$ なので，$\alpha b \in Z(a)$ である．つまり $F^\times b \subseteq Z(a)$ である．しかし，$Z(a)$ は T_b-閉集合であるので，$Fb \subseteq Z(a)$ でなければならない．よって $(a, 0) \in Z$ である．したがって，集合 $\{x \in X : (x, 0) \in Z\}$ は X の一般点を含んでいる．つまり $\{x \in X : (x, 0) \in Z\} = X$ である．

したがって，単に一般点だけでなく，すべての元 $a \in X$ に対して $Z(a) \neq \varnothing$ である．さて，$X \times V$ に次元定理を適用すると，

$$\dim(Z(a)) \geq \dim(Z) - \dim(X) = 1$$

なので，任意の元 a に対して $Z(a)$ が無限集合であることが分かる．よって $(a, v) \in Z$ となる $v \neq 0$ が存在する．$(a, v) \in C^* \cap (X \times V') = \theta^{-1}(C)$ なので，$(a, \theta v) \in C$ である．よって，すべての $a \in X$ は $\pi(C)$ に入っている．すなわち $\pi(C) = X$ である． □

射影多様体がアフィン多様体を貼り合わせて構成されたように，F^n の T_a-アフィン多様体を貼り合わせて T_a-多様体を構成する．T_a-閉集合が T_b-閉集合であるように，T_a-多様体は自然に T_b-多様体とみなすことができる．同様に，T_a-射は，T_b-射である．

補題 5.58 ザリスキー幾何 D と，D の中に翻訳される代数的閉体 F に対して，点集合としては $F = D$ と仮定する．M, N を T_a-多様体とする．代数多様体として M は，多様体 N の部分多様体 M' と同型であり，同型写像を $g : M \longrightarrow N$ とす

る．このとき $g: M \longrightarrow M'$ は T_b-位相について閉写像である．さらに，任意の T_b-多様体 Y に対して，写像

$$(\mathrm{id}_Y, g): Y \times M \longrightarrow Y \times M'$$

も T_b-位相について閉写像である．

証明　多様体 M はアフィン開集合 M_i を貼り合わせたもの，同様に多様体 N はアフィン開集合 N_j を張り合わせたものとする．各 N_j を十分小さくとることにより，$g^{-1}(N_j) \subseteq M_i$ がどれかの i について成り立っているとする．よって g が閉写像であることを示すには，各 $g^{-1}(N_j)$ 上で g が閉写像であることを示せばよい．すなわち，多様体 M, N の各チャートごとに示せばよい．よって M, N がアフィン多様体だとして証明する．したがって M, N をそれぞれ F^m, F^n の T_a-正則集合とする．g は同型射なので F^m 上の各座標写像 x_i に対し，$x_i g^{-1}$ は M' 上の正則写像である．

よって，M' で極を持たない F^n 上の有理写像 r_i が存在して，M' では $r_i = x_i g^{-1}$ が成り立っている．各 r_i の定義域はすべて同じであることに注意する．よって写像 $r = (r_1, \cdots, r_m)$ は，r_i の定義域から F^n への射になる．また，M' では $r = g^{-1}$ である．

さて，$X \subseteq M$ を閉集合とする．X' を F^m における X の閉包とする．このとき，$X = M \cap X'$ かつ $g(X) = M' \cap r^{-1}(X')$ である．r は射なので連続であり，X' は $\mathrm{dom}(r)$ の閉集合である．よって $g(X) \subseteq M'$ は閉集合．したがって g は閉写像である．

$$(\mathrm{id}_Y, g): Y \times M \longrightarrow Y \times M'$$

については，g が射ならば，(id_Y, g) も射になるので，同様に証明できる．　□

補題 5.59　$F = D$ と仮定する．M を，射影多様体と代数的に同型な T_a-多様体とする．このとき M は弱完備である．

証明　$M' \subseteq \mathbb{P}^d$ を部分多様体とし，$f: M \longrightarrow M'$ を同型写像とする．Y を T_b-多様体とする．$C \subseteq Y \times M$ を T_b-閉集合とする．さらに C は Y の稠密な部分集合上に射影されているとする．$F(y, m) = (y, f(m))$ によって，$F: Y \times M \longrightarrow Y \times M'$ を定義すると F は T_b-閉写像である．よって $F(C)$ は $Y \times M'$ の閉集合である．

M' は $\mathbb{P}^d$ の部分多様体だから閉集合である．よって $F(C)$ は $Y \times \mathbb{P}^d$ の閉集合である．ところで，$F(C)$ の Y への射影と，C の Y への写像は同じものなので，C に関する仮定から $F(C)$ は Y で稠密になっている．よって，命題 5.57 より $F(C) = Y$ である．したがって M は弱完備である． □

補題 5.60 Y を射影代数多様体，X を T_b-多様体とする．X, Y はともに，既約な 1 次元の多様体とする．$h \subset X \times Y$ を既約閉集合 (T_b の意味で) とする．h は X の部分集合から Y への写像のグラフとみなす．$\mathrm{dom}(h) \subseteq X$ が稠密ならば $\mathrm{dom}(h) = X$，すなわち h は X 全体から Y への写像である．

証明 Y を $(\mathbb{P}^1)^n$ の部分多様体と見なす．$(\mathbb{P}^1)^n$ の各成分から $\mathbb{P}^1$ への射影を，それぞれ $\pi_1, \cdots, \pi_n$ とする．各 $i = 1, \cdots, n$ に対して，$f_i = \pi_i h$ とおき，F_i を $f_i \subset X \times \mathbb{P}^1$ のザリスキー閉包とする．$h \subset X \times Y$ で $Y \subset (\mathbb{P}^1)^n$ だから，$h \times \mathbb{P}^1 \subset X \times (\mathbb{P}^1)^n \times \mathbb{P}^1$ と考える．同様に，$X \times \pi_i \subset X \times (\mathbb{P}^1)^n \times \mathbb{P}^1$ と考える．$(X \times \pi_1) \cap (h \times \mathbb{P}^1)$ の $X \times \mathbb{P}^1$ への射影が f_i である．

$(X \times \pi_1) \cap (h \times \mathbb{P}^1)$ の任意の成分 C は少なくとも 1 次元であるから，C は既約で $\dim(C) = 1$ である．よって F_i は既約である．したがって命題 5.57 より，$\mathrm{dom}(F_i) = X$ である．次元が 1 であるので例外的軌跡はない．よって系 5.32 より，各 F_i は X から $\mathbb{P}^1$ への関数のグラフであることが分かる．$x \in X$ に対して，$F(x) = (F_1(x), \cdots, F_n(x))$ とおく．F は X から $(\mathbb{P}^1)^n$ への射となる．F と h は一般点に対しては同じ値をとるから $F = h$ でなければならない． □

5.4.3 T_a から T_b へ既約性は保存される

T_a-閉集合は T_b-閉集合になる．しかし一般に「既約性」が保存されるかどうかは明らかでない．ここでは T_a-既約ならば T_b でも既約になることを示す．すなわち，

命題 5.61 X を F^n の T_a-位相での既約閉集合とする．このとき T_b-位相でも既約な閉集合である．

一般の閉集合について考える前に，まず T_a-位相で既約な代数曲線について議論し，ついで代数的集合について既約性が保存されることを示す．F^n の部分集合だけを考えているので，集合として $D = F$ として以下の議論を進める．まず代数曲線の

復習が必要である．

$C \subset \mathbb{P}^n$ を代数曲線とする．以下のことが成り立つ．

(1) 滑らかな曲線 $C' \subset \mathbb{P}^3$ と C' から C の上への射が存在する (特異点の解消).

(2) C が滑らかな曲線のとき，**種数 (genus)** と呼ばれる非負整数が存在して次がなりたつ．

(a) $g = 0$ の代数曲線は射影平面 $\mathbb{P}^1$ だから，$\mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^3$ への T_a-射 f が存在して $f(\mathbb{P}^1) = C$ である．

(b) $g > 0$ のときは，ヤコビ多様体と呼ばれる g 次元のアーベル多様体 J が存在する．J は代数群の構造をもち，可約なアーベル群である．

(c) ヤコビ多様体はさらに次の性質を持つ．C^g から J の上への射 $h : C^g \longrightarrow J$ が存在して，任意の $c_1 \in C$ と，C^{g-1} のある稠密な開集合 H の任意の点 $(c_2, \cdots, c_g)$，さらに任意の $(d_1, \cdots, d_g) \in C^g$ に対して $h(c_1, \cdots, c_g) = h(d_1, \cdots, d_g)$ ならば，$\{1, \cdots, g\}$ のある置換 σ が存在して $d_i = c_{\sigma(i)}$ である．

(d) 有理関数 $f : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ に対して，$(f)_0$ を零点の形式的和，$(f)_\infty$ を極の形式的和とし，f の標準因子 (f) を $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$ で定義する．

$x_1, \cdots, x_g$, $y_1, \cdots y_g$ を C 上の点とすると，性質 (c) の射 h に対して

$$h(x_1, \cdots, x_g) = h(y_1, \cdots, y_g)$$

が成り立つことと，有理関数 $f : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ が存在して

$$(f) = x_1 + \cdots + x_g - y_1 - \cdots - y_g$$

が成り立つことは同値である．

(e)(弱リーマン-ロッホ) $s = \{x_1, \cdots x_t\} \subset C$ に対して

$L(s) = \{f : C \longrightarrow \mathbb{P}^1 : f$ の極はすべて重複度が 1 で $x_1, \cdots, x_t$ の中にある $\}$

とおくと，線形系 $L(s)$ は代数的閉体 F 上の線形空間であり，$t \geq 2g - 1$ のとき，$\dim(L(s)) = t - g + 1$ である．

(f) ヤコビ多様体 J を，一意的な方法で T_a-多様体と見なすことができる．よって J は T_b-多様体と見なすこともできる．J は可約な可換群なので，有限指数をもつ真部分群を持たない．よって T_b-多様体としても既約である．

上記性質はいずれも代数曲線の一般論なので，(c) 以外の証明はここではしない．(c) を言い換えれば，C^g のある真部分閉集合 X の外側の 2 点 $(c_1,\cdots,c_g)$ と $(d_1,\cdots,d_g)\in C^g\backslash X$ に対して $h(\bar{c})=h(\bar{d})$ であることと $\bar{c}$ が $\bar{d}$ の置換であることが同値だということである．さらに J の中で C を $g-1$ 回加えた因子

$$\underbrace{C+\cdots+C}_{g-1}$$

を平行移動したものは $h(X)$ に属さない．

$$E=\{\bar{x}\in C^g : \bar{x} \text{ の置換ではない } \bar{y}\in C^g \text{ が存在して } h(\bar{y})=h(\bar{x})\}$$

とおく．E の閉包 $\bar{E}$ が C^g の真部分集合であることと，任意の点 $c\in C$ と，一般点 $x_2,\cdots,x_g\in C$ に対して

$$(c,x_2,\cdots,x_g)\notin E$$

であることを背理法で示す．したがって $(c,x_2,\cdots,x_g)\in E$ と仮定する．E の定義から $(c,x_2,\cdots,x_g)$ の置換ではない点 $(y_1,\cdots,y_g)$ が存在して $h(c,x_2,\cdots,x_g)=h(y_1,\cdots,y_g)$ が成り立つ．性質 (d) より，定数でない有理関数 $f: C\longrightarrow\mathbb{P}^1$ が存在して，f に重複度 1 の極はあるとしてもすべて $\{c,x_2,\cdots,x_g\}$ に含まれる．よって線形系 $L(c,x_2,\cdots,x_g)$ は定数でない関数を含んでいる．もし線形系 $L(c)$ が定数関数でない関数 f' を含んでいたら，$f'(a)=\infty$ となる点は一点しかないから，f' は C と $\mathbb{P}^1$ の間の同型を与える．そうすると C の種数は 0 になってしまい仮定に反する．よって自然数 $i<g$ が存在して，$L(c,x_2,\cdots,x_i)$ は定数関数だけからなり，$L(c,x_2,\cdots,x_i,x_{i+1})$ は定数関数以外の関数を含む．線形系 $L(c,x_2,\cdots,x_i)$ は 1 次元の線形空間であるが，一般点 $y\in C$ に対して $L(c,x_2,\cdots,x_i,y)$ は少なくとも 2 次元である．C から $2g$ 個の互いに独立な一般点をとり，それらを集めた集合を $Y=\{y_1,\cdots,y_{2g}\}$ とする．任意の $y\in Y$ に対して

$$L(c,x_2,\cdots,x_i,y)\cap L(c,x_2,\cdots,x_i,Y\backslash\{y\})=L(c,x_2,\cdots,x_i)$$

である．よって $2g$ 個の線形系 $L(c,x_2,\cdots,x_i,y_1),\cdots,L(c,x_2,\cdots,x_i,y_{2g})$ の，線形系 $L(c,x_2,\cdots,x_i)$ 上の直和は，線形系 $L(c,x_2,\cdots,x_i,Y)$ の部分空間になっている．よって

$$\dim(L(c, x_2, \cdots, x_i, Y)) \geq 2g+1 > (2g+i-g+1)$$

となって弱リーマン-ロッホ性 (e) に反する．

これらを用いて代数曲線の既約性が保存されることを証明する．

補題 5.62　$C \subset \mathbb{P}^n$ を T_a-既約な代数曲線とする．C は T_b-既約である．

証明　代数曲線の性質 1 より，滑らかな曲線 $C' \subseteq \mathbb{P}^3$ と C' から C の上への射が存在する．よって C' が T_b に関して既約であることを示せばよい．射影直線 $\mathbb{P}^1$ は 2 枚のアフィン直線を貼り合わせたものである．各アフィン直線は既約な開集合である．よって $\mathbb{P}^1$ は既約な強極小集合である．したがって $\mathbb{P}^1$ の連続写像による像も T_b-既約である．よって種数が 0 のときは，C は $\mathbb{P}^1$ と同相なので C は T_b に関して既約である．

以後，C の種数は 1 以上とする．J をヤコビ多様体，C^g から J の上への射を $h: C^g \longrightarrow J$ とする．さらに J の稠密な部分集合上へ射影される，グラフ h の連結成分を F とする．

$$F \subset \underbrace{\mathbb{P}^3 \times \cdots \times \mathbb{P}^3}_{g\ \text{個}} \times J$$

と見なす．補題 5.60 より F は J 全体の上に射影されることが分かる．

C が T_b に関して既約でないとする．$Y \subset C$ を C の無限真部分集合で T_b に関する既約閉集合とする．このとき，

$$F \subset \underbrace{Y \times \cdots \times Y}_{g\ \text{個}} \times J$$

となるように Y をとる．$h: C^g \longrightarrow J$ は全射で F は $\pi_J : F \longrightarrow J$ によって J 全体の上へ射影されているので，$\pi_J(F)$ の各点は $h(y_1, \cdots, y_g)$ と書ける．ただし各 $y_i \in Y$．

さて，$c \in C \backslash Y$ とし，$x_2, \cdots, x_g$ を C の一般点とする．

$$h(c, x_2, \cdots, x_g) = h(y_1, \cdots, y_g) \quad (\text{各 } y_i \in Y)$$

$c \notin Y$ なので $(c, x_2, \cdots, x_g)$ は $(y_1, \cdots, y_g)$ の置換ではない．これは上に述べた代数曲線の性質 2 (c) に反する．よって C は T_b に関して既約である．　□

補題 5.63 代数的集合 $C \subseteq \mathbb{P}^n$ は T_a-既約ならば T_b-既約である.

証明 代数的閉体に新たな述語, 関数などを導入し, 拡張された言語に関して再び強極小集合になるようなものを考える. この場合構成的集合に関しては, ザリスキー位相の意味で既約ならば拡張された言語に関しても既約であることが分かっている (Theorem 1, Hrushovski [18]).

よって C は T_b-位相に関する連結成分は高々 1 個しか持たない. これを C' とおく. $C = C'$ であることを示す.

$\dim(C) = 1$ のときは明らか. $\dim(C) > 1$ のときは帰納法で示す. $a \in C$ を任意の点とする. $C'' = \overline{C \backslash C'}$ とおく. $\dim(C'') < \dim(C)$ である.

a を通る線形超平面 H を考える.

$$\dim(C'' \cap H) \leq \max\{0, \dim(C'') - 1\}$$

が成り立つ. E を a を通る $C \cap H$ の T_a-連結成分とする. このとき

$$\dim(E) \geq \dim(C) - 1 \geq \max\{1, \dim(C'')\}$$

が成り立つ. よって $E \not\subseteq C''$ である. 帰納法により E は T_b に関して既約である.

$$E \subseteq C = C' \cup C''$$

なので $E \subseteq C'$ である. $a \in E$ だったから $a \in C'$. a' は任意の点だったので $C = C'$ が成り立つ. □

5.4.4 純粋性

ここでは, ザリスキー幾何内で翻訳される代数的閉体 F の T_b-位相に関する閉集合が T_a に関しても閉集合であること, すなわち代数的集合であることを示す (射影空間の解析的集合は代数的であることを主張する, Chow の定理の一般化である).

Bézout の定理を応用して, 代数曲線に関してのみ証明する. さらにここでは, $\mathbb{P}^2$ における代数曲線に議論を限定する. そのような曲線たちの中で次数 d のものは,

$$C_d(a) = \left\{(x : y : z) : \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d} a_{ij} x^i y^j z^{d-i-j} = 0\right\}$$

の形で書くことができる. ここで d 次斉次多項式の係数たちを適当な順序でならべて, 各

$$a=(a_{ij}:i+j\le d)=(\underbrace{a_{00}:a_{10}:a_{01}:a_{20}:\cdots:a_{0d}}_{(d+1)(d+2)/2\text{ 個}})$$

を $\mathbb{P}^{(d+1)(d+2)/2-1}$ の点と考える ($i+j=0$ となる i,j の組合せは $i=j=0$ の 1 通り，$i+j=1$ となる i,j の組合せは 2 通り，以下 $i+j=k\le d$ となる i,j の組合せは $k+1$ 通りである．よって $i+j\le d$ となる i,j の組合せは全部で $1+2+\cdots+(d+1)=(d+1)(d+2)/2$ 通りある)．ここで $a,b\in\mathbb{P}^{(d+1)(d+2)/2-1}$ に対して，$a=b$ すなわち，ある $\lambda\in F\backslash\{0\}$ が存在して $a_{ij}=\lambda b_{ij}$ が各 a_{il},b_{ij} について成り立っているとき，射影曲線 $C_d(a)$ と $C_d(b)$ は同じものであることに注意しよう．したがって

$$q(d)=\frac{(d+1)(d+2)}{2}-1$$

とおくと，$\mathbb{P}^{q(d)}$ の点を与えるごとに $\mathbb{P}^2$ の中の射影曲線が定まる．すなわち

$$C=C_d=\left\{((a_{ij}:i+j\le d),(x:y:z)):\sum a_{ij}x^iy^jz^{d-i-j}=0\right\}$$

を考えると各 $a=(a_{ij}:i+j\le d)\in\mathbb{P}^{q(d)}$ に対して射影曲線 $C_d(a)\subseteq\mathbb{P}^2$ が得られる．

以後，$\mathbb{P}^{q(d)}$ を曲線 $C_d(a)$ のパラメーターの空間と見なすときは $\mathbb{Q}^d$ と書く．$C=C_d\subseteq\mathbb{Q}^d\times\mathbb{P}^2$ は閉集合である (T_a に関して閉集合であることは明らか．よって T_b に関しても閉集合である)．

$d=1$ のとき $C_1(a)$ は直線と呼ばれる．$d\ge 2$ のとき，曲線 $C_d(a)$ は既約の場合と可約の場合がある．特に $\mathbb{P}^2$ における d 本の直線の和集合は

$$(a_1x+b_1y+c_1z)\cdots(a_dx+b_dy+c_dz)=0$$

によって定義される．この集合も適当な $a\in\mathbb{Q}^d$ によって $C_d(a)$ と書くことができる．$\mathbb{Q}^d$ の中で，この集合のように $C_d(a)$ が d 本の直線の和集合を定義するような a 全体を考え $\mathbb{L}^d$ とおく．$\mathbb{L}^d$ は T_a-閉集合である．各 $(a_1:b_1:c_1),\cdots,(a_d:b_d:c_d)$ は $\mathbb{P}^2$ の点だから，射影空間の部分空間としての $\mathbb{L}^d$ の次元は $2d$ である．

各 $a\in\mathbb{L}^d$ に対して $C_d(a)$ は d 本の直線の和集合であるが，各直線がすべて異なるとは限らないことに注意しよう．また $c\in C_d(a)$ が 2 本以上の直線上にあるとき c を多重点と呼ぶ．$\mathbb{L}^d$ に関しては次のことが基本的である．すなわち，

$a \in \mathbb{L}^d$ に対して曲線 $C_d(a)$ を考える．射影直線 l が $C_d(a)$ に接するのは l が $C_d(a)$ を構成する d 本の直線のうちのどれかであるか，または l が $C_d(a)$ の多重点を通る場合である．

射影空間 $\mathbb{P}^n$ やアフィン空間 $\mathbb{F}^n$ では次元定理が自由に使えることを思いだしておく．

補題 5.64 $\mathbb{P}^2$ の中から勝手に $q(d)$ 個の点 $c_1, \cdots, c_{q(d)}$ をとる．$a \in \mathbb{Q}^d$ をうまく取ると $C_d(a)$ が $c_1, \cdots, c_{q(d)}$ すべてを通るようにできる．

証明 $q(d)$ 個の点 $c_s = (x_s : y_s : z_s)$ (ただし $s = 1, \cdots, q(d)$) を考える．$R = \{(i,j,k) : i,j,k \geq 0,\ i+j+k = d\}$ とおき，各 $r = (i,j,k) \in R$ に対し，$c_{rs} = x_s^i y_s^j z_s^k$ とおく．$q(d) \times (q(d)+1)$-行列 (c_{rs}) を

$$(c_{rs}) = \begin{pmatrix} x_1^d & x_1^{d-1}y & x_1^{d-1}z & \cdots & z_1^d \\ x_2^d & x_2^{d-1}y & x_2^{d-2}z & \cdots & z_2^d \\ \cdots & & & \cdots & \\ x_{q(d)}^d & x_{q(d)}^{d-1}y & x_{q(d)}^{d-1}z & \cdots & z_{q(d)}^d \end{pmatrix}$$

によって定義する．行列 (c_{rs}) の階数は高々 $q(d)$ だから

$$\begin{pmatrix} x_1^d & x_1^{d-1}y & x_1^{d-1}z & \cdots & z_1^d \\ x_2^d & x_2^{d-1}y & x_2^{d-2}z & \cdots & z_2^d \\ \cdots & & & \cdots & \\ x_{q(d)}^d & x_{q(d)}^{d-1}y & x_{q(d)}^{d-1}z & \cdots & z_{q(d)}^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{d\,0\,0} \\ b_{d-1\,1\,0} \\ \vdots \\ b_{0\,0\,d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす 0 ベクトルでない列ベクトル $(b_{ijk}) = {}^t(b_{d\,0\,0}, b_{d-1\,1\,0}, \cdots, b_{0\,0\,d})$ が存在する．よってこの列ベクトルを用いて d 次斉次方程式

$$\sum_{i+j+k=d} b_{ijk} x^i y^j z^k = 0$$

を考えると，これは斉次多項式 $\sum_{i+j+k=d} b_{ijk} x^i y^j z^k$ によって定義される曲線が，初めに与えられた $q(d)$ 個の点をすべて通っていることを意味する． □

補題 5.65 次の 2 つの性質を持つ，T_a-閉集合 $F \subseteq \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ が存在

する．

(1) $e \in \mathbb{Q}^d$, $b \in \mathbb{Q}^1$, $a_1 \neq a_2 \in C_d(e) \cap C_1(b)$ とする．このとき，$(e, b, a_1, a_2) \in F$.

(2) $(e', b', a', a') \in F$ かつ $e' \in \mathbb{L}^d$ が一般点であるとすると，a' は多重点か，または $C_1(b')$ は $C_d(e')$ の 1 つの成分である．

証明　(1) $F' = \{(u, v, x_1, x_2) : u \in \mathbb{Q}^d,\ v \in \mathbb{Q}^1,\ x_1, x_2 \in C_d(u) \cap C_1(v)\}$ とおく．F' の既約成分の中で，対角線 $x_1 = x_2$ に含まれてしまうものを除いたものたちの和集合を F とすると，F は既約な閉集合である．

(2) $(e^*, b^*, a_1^*, a_2^*) \in F$ を考える．ただし，$(e^*, b^*) \in \mathbb{L}^d \times \mathbb{Q}^1$ は一般点である．このとき $a_1^* \neq a_2^*$ でなければならない．これを示すために

$$(e, b, a_1, a_2) \longrightarrow (e^*, b^*, a_1^*, a_2^*)$$

であるような (e, b, a_1, a_2) を考える．すなわち，(e, b, a_1, a_2) は ザリスキー幾何 D の初等拡大 $\tilde{D}$ の一般点で，特殊化 $\varphi : \tilde{D} \longrightarrow D$ に対して $\varphi(e, a, a_1, a_2) = (e^*, b^*, a_1^*, a_2^*)$ が成り立っている．$\tilde{D}$ において

$$C_d(e) \cap C_1(b) = \{a_1, a_2, \cdots, a_d\}$$

となっているとする．特殊化 $\varphi : \tilde{D} \longrightarrow D$ が

$$(e, b, a_1, \cdots, a_d) \longrightarrow (e^*, b^*, a_1^*, \cdots, a_d^*)$$

を満たすようにできる．よって

$$C_d(e^*) \cap C_1(b^*) = \{a_1^*, \cdots a_d^*\}$$

となる．$(e^*, b^*) \in \mathbb{L}^d \times \mathbb{Q}^1$ は一般点だったので，$\{a_1^*, \cdots, a_d^*\}$ の各要素はすべて異なっていなければならない．よって特に $a_1^* \neq a_2^*$ である．

つぎに e' を $\mathbb{L}^d$ の一般点とし，$(e', e', a', a') \in F$ を考える．$F \cap (\mathbb{L}^d \times \mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ の成分で (e', e', a', a') を含むものを Y とする．(e^*, b^*, a_1^*, a_2^*) を Y の一般点とする．初等拡大の方で $C_1(b^*)$ が $C_d(e^*)$ の成分の 1 つになっていれば，$C_1(b')$ は $C_d(e')$ の成分の 1 つである．よって (2) が成り立つ．

もし $C_1(b^*)$ が $C_d(e^*)$ の成分になっていなければ，$C_1(b^*)$ と $C_d(e^*)$ は有限個の点からなる．よって射影 $\pi : Y \longrightarrow \mathbb{L}^d \times \mathbb{Q}^1$ は有限-1 写像になっていて $\pi(Y)$ は開

集合である．Y の $\mathbb{L}^d \times \mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ における次元は 4 以上である．よって (e^*, b^*) は $\mathbb{L}^d \times \mathbb{Q}^1$ の一般点でなければならない．よって $a_1^* \neq a_2^*$ である．

L_1^*, L_2^* を $C_d(e^*)$ を構成する 2 本の線とし，それぞれ a_1^*, a_2^* を通っているとする (L_1^* は a_1^* を通る，L_2^* は a_2^* を通る)．特殊化

$$(e^*, b^*, a_1^*, a_2^*, L_1^*, L_2^*) \longrightarrow (e', b', a', a', L_1', L_2')$$

が存在する．e^*, e' は $\mathbb{L}^d$ の一般点なので $(e^*, L_1^*, L_2^*) \longrightarrow (e', L_1', L_2')$ は同型写像である．よって $L_1' \neq L_2'$ である．よって点 a' は異なる線 L_1' と L_2' 上にある．よって a' は $C_d(e')$ の多重点である． □

定義 5.66 (1) T_b-既約な，すなわちザリスキー幾何の位相に関して既約な $\mathbb{P}^2$ の閉集合を曲線とよぶ．

(2) $C \subseteq \mathbb{P}^2$ を曲線とする．C と直線 l との交点を考えると，ほとんどすべての直線と C との交点の個数は同じである．この個数を C の次数といい，$\deg(C)$ と書く (代数曲線の次数と直線との交点の個数の関係の類推)．

代数曲線の基本定理である Bézout の定理が，ザリスキー幾何でも成り立つことを主張するのが次の補題である．

定理 5.67 (ザリスキー幾何に対する Bézout の定理) 任意の $e \in \mathbb{Q}^d$ と任意の曲線 C に対して，もし $C_d(e) \cap C$ が有限集合ならば，

$$|C_d(e) \cap C| \leq d \cdot \deg(C)$$

である．

証明 まず C が代数曲線の部分集合の場合を考える．定義より C は T_a-既約である．補題 5.63 より代数的集合に関しては T_a-既約集合は T_b-既約なので，C 自身代数曲線になっている．よって代数曲線に関する通常の Bézout の定理より結論が成り立つ．

よって C が代数曲線の部分集合でない場合を考える．この場合 $C_d(e) \cap C$ は常に有限集合である．また $C_d \cap (\mathbb{Q}^d \times C)$ から $(\mathbb{Q}^d \times C)$ への対応の例外点は空集合である．さらに $C_d \cap (\mathbb{Q}^d \times C)$ の各既約成分 T は C_d の中で余次元 1 である．よって $\mathbb{Q}^d$ の一般点 x に対して $T(x)$ は空集合でない．曲線 C は $\mathbb{P}^2$ に埋め込めるので，

$C_d \cap (\mathbb{Q}^d \times C)$ の各既約成分は系 5.32 の仮定を満たしている (つまり次元定理が成り立っている).

e^* を $\mathbb{Q}^d$ の一般点とし，系 5.32 を $C_d \cap (\mathbb{Q}^d \times C)$ の各既約成分に適用すると

$$|C_d(e) \cap C| \leq |C_d(e^*) \cap C|$$

であることが分かる．よって e も一般点であるとしてよい．

$$C_d(e) \cap C = \{a_1, \cdots, a_r\} \quad (\text{各 } a_i \in \mathbb{P}^2)$$

とする．2 点 a_i，a_j を通る線を $b_{ij} \in \mathbb{Q}^1$ とおく．

$$u = (e, a_1, \cdots, a_r, b_{12}, \cdots, b_{r-1\,r}) \in \mathbb{Q}^d \times \underbrace{\mathbb{P}^2 \times \cdots \times \mathbb{P}^2}_{r \text{ 個}} \times \underbrace{\mathbb{Q}^1 \times \cdots \times \mathbb{Q}^1}_{r(r-1)/2 \text{ 個}}$$

とおき，H を u を含む最小の既約閉集合とする．e は一般点であるから，H の $\mathbb{Q}^d$ への射影は $\mathbb{Q}^d$ の稠密な部分集合である．よって補題 5.60 より H は $\mathbb{Q}^d$ 全体の上に射影される．

$e' \in \mathbb{L}^d$ を一般点とする．このとき $a'_1, \cdots, a'_r$ と $b_{12}, \cdots b_{r-1\,r}$ をうまく取ると

$$(e', a'_1, \cdots, a'_r, b'_{12}, \cdots, b_{r-1\,r}) \in H$$

が成り立つ．補題 5.65 で考えた T_a-既約閉集合 F を再び用いると，各 $i < j$ に対して $(e, b_{ij}, a_i, a_j) \in F$ である．よって $(e', b'_{ij}, a'_i, a'_j) \in F$ である．補題 5.65 (2) より $C_1(b'_{ij})$ が $C_d(e')$ の既約成分の 1 つでなければ，点 $a'_1, \cdots, a'_r$ はすべて異なる．

$a_i \in C$ だから $\mathrm{rk}(a_i) = 1$ である．e' が一般点であり，$C_d(e')$ は点 a'_i を通るから $a'_i \notin \mathrm{acl}(\varnothing)$ である．よって，特殊化 $a_i a_j \longrightarrow a'_i a'_j$ の階数は 1 である．つまりこの特殊化は例外的ではない．したがって

$$\mathrm{rk}(b'_{ij}/a'_i a'_j) \leq \mathrm{rk}(b_{ij}/a_i a_j) = 0$$

である．もし $C_1(b'_{ij})$ が $C_d(e')$ の既約成分の 1 つならば

$$\mathrm{rk}(e'/a'_i a'_j) \leq \mathrm{rk}(\mathbb{Q}^{d-1}) = 2(d-1)$$

である．一方，e' は一般点なので $\mathrm{rk}(e') = 2d$．よって $\mathrm{rk}(a'_i a'_j) = 2$ である．したがって $a'_i \neq a'_j$ である．

ゆえに曲線 C と $C_d(e')$ との交点は少なくとも r 個以上である．しかし $C_d(e')$ は d 本の一般的な線の和集合なので

$$|C_d(e') \cap C| = d \cdot \deg(C)$$

が成り立つ． □

定理 5.68 すべての曲線は代数曲線である，すなわちザリスキー幾何の位相である T_b に関する既約閉集合は，代数的に定義される．

証明 S を曲線とする．$q(d) = (d+1)(d+2)/2 - 1 > d \cdot \deg(S)$ となるような d を 1 つ選ぶ．補題 5.64 より $e \in \mathbb{Q}^d$ をうまくとると $C = C_d(e)$ と S の交点の個数が少なくとも $q(d)$ 以上であるようにできる．よって定理 5.67 より $C \cap S$ は無限集合である．したがって補題 5.63 より $C \subseteq S$ である．S は既約閉集合なので $C = S$ でなければならない． □

さていよいよザリスキー幾何の位相に関する閉集合はすべて代数的に定義されることを証明しよう．

定理 5.69 ザリスキー幾何の中に翻訳される代数的閉体 F の部分集合 $C \subseteq F^n$ は，T_b に関して閉集合ならば代数的集合である．

証明 まず，T_a と T_b は同じ構成可能集合を持つ．つまり，一方の位相に関して構成可能な集合は他方に関しても構成可能であることが知られている (Hrushovski [18])．

$X \subseteq F^n$ が T_a に関して閉集合ならば T_b に関しても閉集合である，すなわち代数的集合はザリスキー幾何を定義するときに与えた位相に関しても閉じている．問題は逆向きである．$X \subseteq F^n$ を T_b-位相に関する既約閉集合とする．X^* を T_a-位相に関する X の閉包，すなわち X を含む T_a に関する最小の閉集合とする．

X^* は T_a に関して既約である．そうでなければ X^* の既約成分の中に X を含むものがあるからそれを X^* とする．このとき

$$\mathrm{rk}(X^* \backslash X) < \mathrm{rk}(X)$$

が成り立つ．Morley 階数の概念は補題 3.36 により強極小集合の中で定義可能だか

ら，ザリスキー幾何においても定義可能な概念である．よって，

$$\dim(X) = \dim(X^*)$$

が T_b-位相に関して成り立つ．補題 5.63 により X^* は T_b に関して既約であるから，$X = X^*$ でなければならない．よって T_a と T_b は一致する．□

より代数幾何的論法の証明を紹介する．もちろん本質的には同じである．まず，代数曲線の部分集合になっている曲線は代数曲線であるという補題を示す (Hrushovski の定理 [18])．ついで上で示した Bézout の定理を応用して，ザリスキー幾何としての $\mathbb{P}^n(K)$ の閉集合がザリスキー位相の閉集合になっていること，すなわち代数的に定義されていることを示す．

補題 5.70　C を曲線，L を代数曲線とし，さらに $C \subseteq L$ とする．このとき C も代数曲線である．

証明　代数曲線 L に対しそのヤコビ多様体を J_L とする．J_L は可約なアーベル多様体である．L を J_L に埋め込むことができるので $L \subseteq J_L$ と見なす．$g = \dim J_L$ とおく．$x \in J_L$ を一般点とすると

$$x = y_1 + \cdots + y_g,\ \text{ただし}\ y_1, \cdots, y_g \in L$$

と書くことができる．

C を L の真部分集合とし，$\dim(L) = \dim(C) = \dim(L \backslash C) = 1$ とする．集合

$$\{y_1 + \cdots + y_g : y_1, \cdots, y_g \in C\}\ \text{と}\ \{z_1 + \cdots + z_g : z_1, \cdots, z_g \in L \backslash C\}$$

は，J_L の部分集合で共通部分を持たない．またともに次元は g である．このことは J_L が連結でないことを意味する．ところが J_L は可約であり連結でなければならないので，矛盾してしまう．したがって $L \backslash C$ は次元 0，すなわち有限集合でなければならないので C も代数曲線である．□

定理 5.71 (一般化された Chow の定理)　K を代数的閉体とする．$\mathbb{P}^n(K)$ の閉集合はザリスキー位相でも閉集合である，すなわち代数的集合である．

証明　$n = 2$ のとき．定理 5.68 の証明と同じように証明する．

$n \geq 3$ のとき．n に関する帰納法で示す．$C \subseteq \mathbb{P}^n$ を閉集合とし，$\mathbb{P}^{n-1}$ に関して

定理の主張は正しいと仮定する.

$\mathbb{P}^{n-2}$ と同型な $H \subset \mathbb{P}^n$ と, $\mathbb{P}^1$ と同型な $l \subset \mathbb{P}^n$ を考える. $l \times H$ を $\mathbb{P}^{1+(n-2)+1(n-2)}$ の部分空間と考える. l 上の点 p と H で生成される空間を S_p とする. S_p は $\mathbb{P}^{n-1}$ と同型で, かつ同型写像は双正則である. $C_p = C \cap S_p$ とおく. $C_p \subset \mathbb{P}^{n-1}$ だから C_p に対して帰納法の仮定を適用すると, C_p が代数的集合であることが分かる. よって C_p は有限個の斉次多項式 $f_{p,1}, \cdots, f_{p,k_p}$ の零点集合になっている. p として l の一般点のみを考えるので, k_p の値と斉次多項式の次数は p に依存せず決まっているとしてよい.

多項式 $f_{p,m}$ の i 番目の係数を $a(p,m,i)$ とおく. l は $\mathbb{P}^1$ と同型だから, $\mathbb{P}^1$ の一般点 p に対して写像

$$a(\cdot,m,i) : \mathbb{P}^1 \ni p \longmapsto a(p,m,i) \in \mathbb{P}^1$$

を考えることができる. この写像 $a(\cdot,m,i)$ を $a_{m,i}$ と書く. $a_{m,i}$ のグラフを $\mathbb{P}^2$ の中の曲線と考えると, $n=2$ の場合の結果から $a_{m,i}$ は $\mathbb{P}^2$ の中の代数曲線である. したがって多項式の零点集合になっている. よって多項式 $g_1(u,\bar{v}), \cdots, g_m(u,\bar{v})$ が存在して, S_p の一般点 $\bar{x}$ に対して,

$$f_{p,m}(\bar{x}) = g_m(p,\bar{x})$$

が成り立つ. よってほとんどすべての $(p,\bar{x}) \in \mathbb{P}$ に対して

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{m} g_i(p,\bar{x}) = 0\right) \Longrightarrow (p,\bar{x}) \in C$$

である. つまり C の部分集合 C^* で, C^* は代数的集合, $\mathrm{rk}(C^*) = \mathrm{rk}(C)$ かつ $\mathrm{rk}(C \backslash C^*) < \mathrm{rk}(C)$ となるものが存在する. よって C 自身代数的集合でなければならない. □

5.5 大団円

5 章最初に引用した, Hrushovski と Zilber の論文 [25] の冒頭を思い出そう. ザリスキー幾何の公理 (Z0) ～ (Z3) を満たす, ネーター空間の族, X^n $(n = 1, 2, \cdots)$ が与えられたとする. この族によって定義されるザリスキー幾何 D が, 豊富なザリスキー幾何であれば, 5.3 節の結果から D^{eq} の中で代数的閉体 k が定義される. このとき最初に考えた集合 X が, 実は k 上の代数曲線となるのである.

定理 5.72　D を豊富なザリスキー幾何とする．このとき代数的閉体 K と，D から $\mathbb{P}^1(K)$ の上へのザリスキー写像 $f: D \longrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ が存在する．写像 f は，ザリスキー幾何 D の構成可能集合を，$\mathbb{P}^1(K)$ の構成可能集合 (代数幾何学の意味での) へ移す．実際 D から有限集合 F を除けば，f は $D \backslash F$ から $\mathbb{P}^1(K)$ への，ザリスキー閉写像である．

D が豊富なので，(1 次元の) 体 K が D^{eq} で定義可能である．K の 2 つの演算は，射であるとしてよい．D の強極小性と Macintyre の定理から K は代数的閉体である．Macintyre の定理の証明を本書では 2 つ与えたが，さらにもう 1 つ別の証明をここで与えておく．まず $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$ に注意する．$f \in K[x]$ を多項式とする (定数ではない)．f を K から K への射とみなす．さらに f のグラフの閉包を考え，$\mathbb{P}^1(K)$ から $\mathbb{P}^1(K)$ への射 g に拡大する．補題 5.57 から g は全射である．よって $g(a) = 0, g(b) = \infty$ となる $a, b \in \mathbb{P}^1(K)$ が存在する．任意の $z \in K$ に対して，$f(z) \neq \infty$ だから，$g(\infty) = \infty$ でなければならない．よって $g(a) = 0$ となる $a \neq \infty$ が存在する．K 上では $f = g$ だから $f(a) = 0$ となって K が代数的閉体であることが分かる．

$K \subseteq D^{\mathrm{eq}}$ だから，ザリスキー幾何が弱い意味で仮想元を消去することから，a を K の一般点とすると，

$$a \in \mathrm{acl}(d_1, \cdots, d_k)$$

となる D の元 $d_1, \cdots, d_k$ が存在する．k の値を最小にするような集合 $\{d_1, \cdots, d_k\}$ を考える．$\{d_1, \cdots, d_{k-1}\}$ を固定して議論することにして，今後 $a \in K, d \in D$ をそれぞれ一般元で $\mathrm{acl}(a) = \mathrm{acl}(d)$ が成り立っているとする．

さて定理の証明にとりかかろう．

(1) D から $\mathbb{P}^1(K)$ への，定数でない射が存在する．

(2) D から $\mathbb{P}^1(K)$ の上への射が存在する．

(3) D から $\mathbb{P}^1(K)$ の上への任意の射 h に対して，有限集合 $F \subset D$ が存在して $h: (D \backslash F) \longrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ はザリスキー閉写像である．の順で証明する．

(1) の証明．$C(a) \subset K$ を b の a 上の軌跡とする．$C(a)$ は有限集合だから，

$$C(a) = \left\{ m \in K : \ m \text{ は多項式 } f(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \text{ の解} \right\}$$

となる $f(x) \in K[x]$ が存在する．$C(a)$ は，任意の自己同型 $\alpha \in \mathrm{Aut}(K/a)$ によって動かない．したがって多項式 $f(x)$ の各係数 b_i に対して $\alpha(b_i) = b_i$ である．よって $b_i \in \mathrm{dcl}(a)$．ゆえに $\mathrm{acl}(a) = \mathrm{acl}(b_0, \cdots, b_n)$．したがって $b \in \mathrm{acl}(b_0, \cdots, b_n)$ である．ゆえに $b_0, \cdots, b_n$ のすべてが $\mathrm{acl}(\varnothing)$ に属している訳ではない．これらのうちで $\mathrm{acl}(\varnothing)$ に入っていないものを b' とおく．

$H \subseteq D \times \mathbb{P}^1(K)$ を (a, b') の $\mathrm{acl}(\varnothing)$ 上の軌跡とする．H は，次元 1 の既約閉集合である．$H(a)$ は一点集合である．a は D の一般点なので，系 5.32 より

主張： 任意の $a' \in D$ に対して，$|H(a')| \leq |H(a)| = 1$ となるか，または $|H(a')|$ が無限集合となるような $a' \in D$ が存在する．

後者の場合，$|H(a')|$ が無限集合となるような a' に対して $\{a'\} \times K$ は H の既約成分となってしまい H の既約性に反する．したがって，任意の $a' \in D$ に対して $|H(a')| \leq 1$ である．つまり H は D から $\mathbb{P}^1(K)$ への部分写像である．命題 5.57 より，任意の $a' \in D$ に対して $|H(a')| = 1$ でなければならない．よって H は D 全体から $\mathbb{P}^1(K)$ への写像であり，したがって射である．

(2) の証明．$h : D \longrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ を定数でない射とする．適当な Möbius 変換 $\mathbb{P}^1(K) \longrightarrow \mathbb{P}^1(K)$ と組み合わせることによって $0, \infty \in h(D)$ と考える．$n > |\mathbb{P}^1(K) \backslash h(D)|$ となる n をひとつ固定する．代数的閉体 K の標数 p が正の場合，n と p は互いに素であるようにとる．$\mathbb{P}^1(K) \backslash \{0, \infty\}$ のすべての元は，n 個の n 乗根を持つから，任意の $a \in \mathbb{P}^1(K)$ に対して a の n 乗根の中に $h(D)$ に入っているものが存在する．h と写像 $x \longmapsto x^n$ を組み合わせることによって D から $\mathbb{P}^1(K)$ の上への射を定義することができる．

(3) の証明．$b \in \mathbb{P}^1(K)$ を一般点とし，$h^{-1}(b) = \{a_1, \cdots, a_m\}$ とする．F^* を $\mathrm{acl}(\varnothing)$ 上の $(b, (a_1, \cdots, a_m))$ の軌跡とする．$[D]^m = D^m/\mathrm{Sym}(m)$ とおく．D^m から $[D]^m$ への商写像を q とおく．$F = q(F^*)$ とおけば，F は $\mathbb{P}^1(K) \times [D]^m$ の既約閉集合である．さて $(b, (a'_1, \cdots, a'_m)) \in F^*$ ならば $\{a'_1, \cdots, a'_m\} = h^{-1}(b)$ なので，$q(a'_1, \cdots, a'_m) = q(a_1, \cdots, a_m)$ である．よって一般点 b に対して $|F(b)| = 1$ である．$\dim(F) = 1$ だから，(1) の証明と同様，F は部分写像 f のグラフになっている．$Y = \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{P}^1(K)$ とする． $Z = h^{-1}(Y)$ とおくと，$D \backslash Z$ は有限集合である．つまり Z は D の補-有限部分集合である．h は Z 上のザリスキー閉写像である

ことが次のようにして分かる．

$C \subseteq Z^k$ をザリスキー閉集合とする．$h(C)$ が閉集合であることを示す．

$$\tilde{C} = \Big\{((a_1^1, \cdots, a_m^1), \cdots, (a_1^k, \cdots, a_m^k)) \in (D^m)^k :$$
$$\exists \nu : \{1, \cdots, k\} \longrightarrow \{1, \cdots, m\}, (a_{\nu 1}^1, \cdots, a_{\nu k}^k) \in C\Big\}$$

とおくと，$\tilde{C}$ は閉集合である．写像 q は閉写像だから $q(\tilde{C})$ も閉集合である．

$$S = \{s \in [D]^m : \ h \text{ は } s \text{ 上一定 }\}$$

とおくと，S は $[D]^m$ の閉集合である．一般点 b に対して $f(b) \in S$ だから，すべての点 b に対して $f(b) \in S$ である．したがって $h(C) = f^{-1}(q(\tilde{C}))$ より $h(C)$ は閉集合である．

以上で定理 5.72 の証明が終わる．本来の大団円を迎えるにはさらに次の定理が必要である．

定理 5.73　X を非常に豊富なザリスキー幾何とする．このとき，代数的閉体 K と K 上の滑らかな (非特異な) 曲線 D が存在して，X と D はザリスキー幾何として同型になる．

この定理の証明あたりから，ザリスキー幾何の議論はさらに面白くなってくる．しかし相当数の頁が必要となるのでザリスキー幾何の一般論はこのあたりで終えることにする．

5.6　ザリスキー幾何の例：微分閉体と分離閉体の階数 1 の集合

ザリスキー幾何の例として，既約な代数曲線をあげたが，ザリスキー幾何がどのような問題意識の下で構想されたかを考えればいわば自明な例である．非自明な例を 2 つ紹介する．いずれも Hrushovski による幾何的 Mordell-Lang 予想の証明で重要な働きをすることになる．そのために微分閉体と分離閉体のモデル理論について簡単に解説する．

5.6.1　微分閉体

代数方程式が常に解を持つ体が代数的閉体であるように，代数的微分方程式が常に解を持つ体として，微分閉体を定義したい．まず微分体を定義する．

K を標数 0 の体とする．K から K への写像 $\delta : K \longrightarrow K$ を考える．

(1) すべての $x, y \in K$ に対して $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y)$,

(2) すべての $x, y \in K$ に対して $\delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x)$

が成り立っているとき，K を微分体とよぶ．K の部分集合 $C = \{x \in K : \delta(x) = 0\}$ を定数体とよぶ．微分多項式環 $K\{X\}$ を次のように定義する．

$$K\{X\} = K[X, \delta(X), \delta^2(X), \cdots]$$

$f \in K\{X\}$ のとき，f に現れる $\delta^m(X)$ たちの中で最大の m を f の微分次数といい，$\mathrm{ord}(f)$ と書く．

定義 5.74　K を微分体とする．任意の $f, g \in K\{X\}$ に対して，

$g \neq 0$ かつ $\mathrm{ord}(f) > \mathrm{ord}(g)) \Longrightarrow$

$(f(a) = 0$ かつ $g(a) \neq 0$ となる $a \in K$ が存在する$)$

が成り立っているとき，K を**微分閉体**と呼ぶ．

注意 5.75　微分閉体の定数体は，代数的閉体である．

微分体のモデル理論を展開するための言語として，$L_\delta = \{+, -, \cdot, \delta, 0, 1\}$ を固定する．δ は 1 変数関数記号である．

微分閉体の持つ性質を L_δ-文を用いて次のように公理化する．

(1) 体の公理 (標数 0).

(2) $\forall x\, \forall y\, (\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y))$, $\forall x\, \forall y\, (\delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x)$.

(3) 各自然数 m, d_0, d_1 に対する，次のことを表現する L_δ-文 ϕ_{m,d_0,d_1} :

f が微分次数 m の微分多項式で，次数が高々 d_0 で，$g \neq 0$ が微分次数が m より小さく次数が高々 d_1 である微分多項式ならば，$f(x) = 0$ かつ $g(x) \neq 0$ となる x が存在する．

これら無限個の L_δ-文の集合を DCF とおく．

定理 5.76　DCF は次の性質を持つ．

(1) DCF は量記号を消去する．よってモデル完全である．

(2) DCF は完全である．

(3) DCF は ω-安定理論である.

(4) DCF は仮想元を消去する.

微分閉体における強極小集合がザリスキー幾何になることが知られている.

定理 5.77　K を微分閉体とし, $D \subset K^n$ を強極小集合, すなわち Morley 階数, Morley 次数ともに 1 の定義可能集合とする. このとき有限集合 $F \subset D$ が存在して $D \backslash F$ がザリスキー幾何になる.

系 5.78　K を微分閉体, $D \subset K^n$ を強極小集合とする. (D, acl) は局所モジュラーでない前幾何になっているとする. このとき, D^{eq} に代数的閉体 F が定義可能であり, さらに F と K の定数体の間には, L_δ-定義可能な同型写像が存在する.

5.6.2　分離閉体

p を素数とし, $\mathbb{F}_p$ を標数 p の素体とする. 標数 $p > 0$ の体 $K \neq \mathbb{F}_p$ に対し, $x \longmapsto x^p$ は K から K への単射準同型である. Fr を Frobenius 準同型とよぶ.

$$K^p = \{x^p \in K : x \in K\}$$

とおく. $\mathrm{Fr}(K) = K^p$ である. Fr が全射であるとき, すなわち $K^p = K$ であるとき, K を完全体と呼ぶのであった (定義 1.25, 補題 1.26 参照).

分離的な元, 分離閉包といった概念を簡単に復習しておく (『可換体論 (新版)』2 章参照).

$L \supset K$ を K の代数拡大体とする. $a \in L$ とし $f_a(x)$ を a の K 上の最小多項式とする. $f_a(x)$ が重解を持たないとき, a は K 上分離的であるという. $f_a(x)$ が唯一の解しか持たないとき, a は K 上純非分離的であるという. L_s を K 上分離的な L の元全体とおくと, L_s は L の部分体になる. L は L_s 上, 純非分離的である, すなわち任意の L の元は L_s 上純非分離的である. L_s を K の L における分離閉包という. L が K の有限次拡大のとき $[L, L_s]$, $[L_s, K]$ をそれぞれ非分離次数, 分離次数とよぶ.

L が K の代数的閉包であるとき L_s を K^s と書くことにする. $K^s = K$ のとき, K を分離閉体とよぶ. 環の言語 $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ を少し大きくした言語 L^* を考え, L^* で標数 p の分離閉体の性質を記述した文の集合, すなわち分離閉体の理論を

SCF_p とおく．

代数的閉体の理論 ACF_p や 微分閉体の理論 DCF がともに ω-安定な理論であるのに対し，分離閉体の理論 SCF_p は安定理論であることが分かっている．ここで 1 階の理論について

強極小 $\Longrightarrow$ 非可算範疇的 $\Longrightarrow$ ω-安定 $\Longrightarrow$ 超安定 $\Longrightarrow$ 安定

であることが分かっている (強極小 $\Longrightarrow$ 非可算範疇的は系 3.23，非可算範疇的 $\Longrightarrow$ ω-安定は系 3.60 で示した)．したがって，分離閉体の理論に関するモデル理論的議論は ACF_p や DCF に比べてより複雑になる．

安定理論 T においても，Morley 階数をより一般化した階数の概念を定義することができる．Morley 階数 1 の定義可能集合に相当するものとして，極小タイプというものを考える．

定義 5.79　$\mathfrak{M}$ を T の万有モデルとする．p を完全タイプとする．$\mathfrak{M}$ のどんな定義可能部分集合 X に対しても，$p(\mathfrak{M}) \cap X$ が有限集合か補-有限集合であるとき，p を極小タイプと呼ぶ．

定義 5.80 (ザリスキータイプの公理)　P を極小タイプ p の $\mathfrak{M}$ における解集合とする．量記号と否定記号が現れない論理式で定義される $X \subseteq P^n$ を基本閉集合系とする位相を各 P^n に導入する．次の性質が成り立つとき，タイプ p は**ザリスキータイプ**であるという．

(1) P^n の各閉集合は，有限個の既約閉部分集合の和集合である．

(2) $X \subset Y$ を P^n のそれぞれ閉集合とする．Y が既約ならば $\mathrm{RU}(X) < \mathrm{RU}(Y)$ である．

(3) X を P^n の既約閉部分集合とする．$\Delta^n_{i,j} = \{\bar{x} \in P^n : x_i = x_j\}$ とおく．$\mathrm{RU}(X) = m$ とすると，$X \cap \Delta^n_{i,j}$ の空でない既約成分 W について $\mathrm{RU}(W) \geq m - 1$ である．

ザリスキータイプは，ザリスキー幾何の一般化になっている．5 章で行った議論をより一般的な状況下で展開することによって，ザリスキータイプに対して次の結果を得る．

定理 5.81　T を安定理論，p を極小タイプとする．p がザリスキータイプで，極小集合に対する組合せ幾何に関して局所モジュラーでないとする (豊富なザリスキー幾何の一般化)．このとき T は体 F を翻訳し，定義可能な部分体 F_α が存在して $\bigcap_\alpha F_\alpha$ と p が直交しないようにできる．

体を定義することが必要になるが，これは群図表を用いて行う．4 章で紹介した方法は，安定理論で展開できることが知られている (詳しくは，Bouscaren の群図表解説論文 [5] あるいは Hrushovski [16] 参照)．この定理が，正標数の場合の幾何的 Mordell-Lang 予想の解決において活躍する．

ザリスキー型タイプを用いて定義される，ザリスキー幾何の一般化を**ザリスキー型幾何**と呼ぶことにする．正標数の場合の代数幾何学の道具となる可能性があるだけに，今後一層の研究が必要であろう．

6

E.Hrushovski の仕事

E.Hrushovski の仕事は広範囲にわたり，しかも多作である．安定性理論における数多くの未解決問題を解いたり，モデルの構成法を新たに考え出している．現在も活発に活動中であり,「次に何をするのだろうか」と常に皆が注目している．

ここでは 1-基底群の性質とザリスキー幾何の応用を中心に，数論幾何学における E.Hrushovski の仕事の一部を紹介する．ただ本書で解説する結果は，1990 年代初めまでの結果であることを予めお断りしておく．また証明は高度に技術的で，とてもここで全体像を解説することはできない．詳細を知りたい方は，H.Hrushovski の論文 [19], [23] あるいは，E.Bouscaren, Z.Chatzidakis, A.Pillay による解説論文 [6], [8], [10], [11], [32], [33] などと格闘していただきたい．

6.1　幾何的 Mordell-Lang 予想と Manin-Mumford 予想

楕円曲線の有理点上に有限生成な群構造が定義されるという Mordell の定理や，種数 2 以上の代数曲線の有理点が有限個しかないことを示した Faltings の定理 (Mordell 予想) は有名である．いずれも，有理点の集合が「小さい」ことを表現していると考えてよい．

楕円曲線はアーベル多様体の典型例である．S.Lang は，1920 年代の Mordell 予想，60 年代の Manin-Mumford 予想を含む形で，次に述べる予想を提唱した．

定理 6.1 (Lang 予想)　A を複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義されたアーベル多様体，Γ をランク有限な $A(\mathbb{C})$ の部分群，X を $A(\mathbb{C})$ の部分閉多様体とする．このとき，有限個の点 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ と $A(\mathbb{C})$ の有限個の部分アーベル多様体 $B_1, \cdots, B_n$ が存在して，次が成り立っている．

(1) 各 i について $\gamma_i + B_i \subset X$ かつ (2) $X(\mathbb{C}) \cap \Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i + (B_i \cap \Gamma)$

この定理の本質的な部分は，G.Faltings によって証明され，のちに P.Vojta, M.Hindly, M.McQuillan らによって一般化されている．完備かつ連結な代数群をアーベル多様体という．群 Γ が有限生成な部分群 Γ_0 をもち，Γ の任意の元 γ に対して，自然数 n が存在して $n\gamma \in \Gamma_0$ が成り立っているとき，Γ は有限ランクな群であるという．

A を数体 F 上定義されたアーベル多様体とする．ここで数体というのは，$\mathbb{Q}$ の有限次拡大体のことである．Mordell-Weil の定理より，$A(F)$ は有限生成な群である．よって，Lang 予想において X を A の部分多様体とすれば $X(F)$ は剰余類の有限和になる．したがって，特に X として F 上の非特異射影代数曲線 (種数 2 以上) をとり，A として X のヤコビ多様体をとると $X(F)$ は有限集合になり Mordell 予想が得られる．また，アーベル多様体 A の捩れ群

$$\mathrm{Tor}(A) = \{a \in A : \exists n \in \mathbb{N}\ (na = 0)\}$$

(各 $a \in \mathrm{Tor}(A)$ を等分点という) は有限ランクなので，Lang 予想より $X \cap \mathrm{Tor}(A)$ は有限集合になり，次に述べる Manin-Mumford 予想 (Raynaud の定理) が得られる．

定理 6.2 (Manin-Mumford 予想)　k を数体とする．G は k 上定義された代数群で，可換かつ連結とする．さらに X を G の部分多様体とする．このとき G の等分点 $a_1, \cdots, a_n$ と，部分代数群 $G_1, \cdots, G_n$ が存在して，次が成り立っている．

(1) 各 i について $a_i + G_i \subseteq X$ かつ (2) $X(k^{\mathrm{alg}}) \cap \mathrm{Tor}(G) = \bigcup_{i=1}^{n} a_i + \mathrm{Tor}(G_i)$

6.1.1　幾何的 Mordell-Lang 予想

数体に関する予想を，関数体へと一般化するのはごく自然である．Lang 予想をそのまま関数体へ一般化すると正標数の場合は正しくない．この点を考慮して，次の予想を得る．

定理 6.3 (幾何的 Mordell-Lang 予想)　$k_0 \subset K$ を異なる代数的閉体とする．A をアーベル多様体，X を A の無限部分多様体とし，ともに K 上で定義されているものとする．また，Γ をランク有限な $A(K)$ の部分群とする．さらに

$$\mathrm{Stab}_X = \{a \in A : a + X = X\}$$

は有限であるとする．このとき次の (1), (2) のどちらかが成り立つ．

(1) $X \cap \Gamma$ は X でザリスキー稠密でない．

(2) A の部分アーベル多様体 B，k_0 上定義されたアーベル多様体 S，S の部分多様体で k_0 上定義されている X_0，さらに B から $S \underset{k_0}{\otimes} K$ への K 上の同型射 h が存在して，$X = a_0 + h^{-1}\left(X_0 \underset{k_0}{\otimes} K\right)$ $(a_0 \in A)$ と書ける．

G を有限ランクな群，あるいは捩れ群とする．上の 3 つの定理において $G \cap X$ の構造を決めることが中心課題である．つまり，G のある種の部分集合は，

(∗) 有限個の部分群の剰余類の和になっているかどうか

という点である．

モデル理論において，このような性質を持つ群はすでに 1985 年に，E.Hrushovski と A.Pillay によって認識されていた [24]．1-基底群 (one-based group) と呼ばれる群である．3 章 8 節で解説した 1-基底群の性質の中でも，特に定理 3.123 はまさに (∗) そのものである．当時数論幾何学への応用は思いもおよばなかった．

幾何的 Mordell-Lang 予想の証明において，(1) でないという状況の下で (2) を証明するために，Hrushovski は非常に斬新な方法を用いる．つまり (1) でないと仮定して，k_0 と同型な体および k_0 上定義されている多様体 X_0，さらに X_0 への射 h もモデル理論的に構成してしまうのである．k_0 と同型な体を構成するという方法は，これまで代数幾何学にはなかった発想であり手法である．

6.2 幾何的 Mordell-Lang 予想の解決

幾何的 Mordell-Lang 予想は，標数 0 の場合に A.Buium が微分代数の手法を用いて証明した [4]．また，正標数の場合は D.Abramovich, J.F.Voloch らによっていくつかの部分解が得られていた．Buium の手法にヒントを得て，Hrushovski は幾何的モデル理論を用いてすべての標数について予想を解決した．

Hrushovski の論法を見やすくするために，E.Bouscaren [6] にしたがって，幾何的 Mordell-Lang 予想を次のように定式化する．

標数の如何にかかわらず，次のことを証明する．

仮定 1： 2 つの代数的閉体 $k_0 \subset K$，K 上定義されたアーベル多様体 A, 同じく K 上定義された A の部分多様体 X, そして A のランク有限な部分群 Γ が与えられたとする．

結論： 次の (1), (2) のどちらかが成り立つ．

(1) $X \cap \Gamma$ は，Γ の有限個の部分群 $B_1, \cdots, B_n$ の剰余類の和集合である．

(2) A, X は実質的に k_0 で定義されている：k_0 で定義されたアーベル多様体 S と，同じく k_0 で定義された，S の部分多様体 S_0，A から S への準同型 $h : A \longrightarrow S$ が存在して，$X = h^{-1}(S_0)$ である．

結論 (1) は Γ が 1-基底群の性質を持っていることを主張し，結論 (1) が成り立たないと仮定すると A, X が k_0-定義可能であることを示すために，豊富なザリスキー幾何が活躍する．

群 Γ が「ランク有限」であるという定義の中の「自然数 n が存在して $\sim$ である」の部分は，1 階のモデル理論では扱えない．この障害をモデル理論的に克服するために，$\Gamma \subseteq H$ となるような 1-基底群 H を定義可能集合を増やした構造の中で探すことにする．

このような理由で，標数 0 の場合は微分閉体が，正標数の場合は分離閉体が登場する。Hrushovski の論法は標数によらないが，技術的にはいろいろ細かな点が異なるので標数が 0 の場合と正の場合に分けて，標数 0 の場合を中心に概説する．

アーベル多様体の基本性質が証明の随所で用いられる．主なものをまとめておく．

補題 6.4　K を代数的閉体，A を K 上のアーベル多様体とする．

(1) A は連結な可換代数群である．

(2) $\mathrm{Tor}(A)$ は無限集合である．各 n に対して $\mathrm{Tor}_n(A) = \{a \in A : na = 0\}$ は有限集合である．

(3) A が K の部分体 k 上定義されているとする．G を A の閉部分群とする．標数 0 の場合，G は k^{alg} で定義されている．正標数の場合，G は k^s で定義されている．ここで k^s は k の分離閉包である．

(4) $\mathrm{ch}(K) = p > 0$，k を K の部分体とする．A は k 上定義されているとする．このとき，A の k^s-有理点 $A(k^s)$ は A のなかで稠密な部分群である．$a \in A(k^s)$ か

つ $b = na$ とする．ただし n は p と互いに素．このとき $b \in A(k^s)$ である．

(5)(Chevalley の定理) G を K 上定義された代数群とする．このとき G/M がアーベル多様体となるような，G の極小閉部分群 M が存在する．ここで，M は K 上定義されている．

6.2.1　標数 0 の場合

代数的閉体に関する議論と微分閉体に関する議論を区別する必要がある．代数的閉体のモデル理論で定義可能なものを単に定義可能と呼び，微分閉体で定義可能なものを δ-定義可能と呼ぶ．また，代数的閉体のモデル理論で定義可能な場合，代数学の意味での定義可能性と一致することも注意しておく．

幾何的 Mordell-Lang 予想における $k_0 \subset K$ は異なる代数的閉体なので，K 上に微分演算 δ を導入し，(K, δ) が微分体，k_0 が K の定数体となるようにできる．(K, δ) の微分閉包を $\widetilde{K}$ とする．k_0 と $\widetilde{K}$ をともに代数的閉体と考えて，定理を k_0 と $\widetilde{K}$ について証明する．つまり A, X などが $\widetilde{K}$ 上で定義されているとして証明する．$k_0 \subset K \subset \widetilde{K}$ なのだから，A, X などが K 上で定義されていれば当然結論が成り立つ．

微分閉体のモデル理論を活用するには飽和モデルが必要である．$\widetilde{K}$ の初等拡大で $\aleph_0$-飽和になっている微分閉体を L とする．ここで L の定数体 k_0' とすると，$k_0 \subseteq k_0'$ となっていることに注意．

主張： 代数的閉体としての $k_0' \subset L$ に対して定理を証明すれば十分である．

証明　$k_0' \subset L$ に対して結論 (2) が証明されれば，$k_0 \subset \widetilde{K}$ に対しても結論 (2) が成り立つことを示す．仮定から，A の部分アーベル多様体 B (L で定義されている)，k_0' で定義されているアーベル多様体 S'，やはり k_0' で定義されている多様体 X_0'，L で定義されている同型射 $h_1 : B \longrightarrow S'$ が存在して $X = a_0' + h_1^{-1}(X_0')$ と書ける．これは A, X などを定義しているパラメーターを用いた 1 階の文で表現できるので，L が $\widetilde{K}$ の初等拡大であることから $\widetilde{K}$ でも同様のことが成り立っている．B は L で定義されているがアーベル多様体の性質から $\widetilde{K}$ で定義されていることが分かるので，$k_0 \subset \widetilde{K}$ に対して結論 (2) が成り立つことがわかる．□

有限ランク群 Γ はモデル理論では扱えないので，$\Gamma \subseteq H$ となる δ-定義可能な群

が必要になる。このような群の存在は、Manin-Buium 写像の核として得られる。すなわち，

定理 6.5 ([40] Theorem 4.1)　K を微分閉体，A を K 上定義されたアーベル多様体とする．Γ を $A(K)$ のランク有限な部分群とする．このとき A の δ-定義可能な部分群 H で，$\Gamma \subseteq H$ かつ $\mathrm{RM}_\delta(H) < \omega$ となるものが存在する．

ザリスキー幾何の理論が威力を発揮するのは，H が「ほとんど階数 1」な群の場合である．この場合に証明のポイントを見てみよう．H がほとんど階数 1 なので，定義より $H \subseteq \mathrm{acl}(B)$ となる $\mathrm{RM}_\delta(B) = 1$ である集合 B が存在する．定理 5.77 より $\mathrm{RM}_\delta = 1$ の集合はザリスキー幾何になる．ザリスキー幾何に対しては，

$$1\text{-基底的でない} \iff \text{豊富である}$$

という性質があるので，H が 1-基底的でない場合 B は豊富なザリスキー幾何になる．ザリスキー幾何の基本定理 (定理 5.55) より，代数的閉体 F が B^{eq} 内に定義されるが，F は次の定理により k_0 と同型になっている．

定理 6.6 (Z.Sokolovic [42])　DCF_0 で定義される RM_δ 有限な体は，定数体 $\{x : \delta(x) = 0\}$ と同型である．この同型は DCF_0 で δ-定義可能である．

したがって，B^{eq} に定数体が再構成されたと考えてよい．定数体は代数的閉体であるので，F 上定義された群は代数群とみなしたいところである．これを保証するのが，次の定理である．

定理 6.7 (Weil-Hrushovski-van den Dries [34], Proposition 4.12)　K を代数的閉体とする．K 上 ACF_p の意味で定義された群を G とする．G は K 上の代数群と同型であり，この同型写像は ACF_p で定義可能である．

$\mathrm{RM}_\delta(H)$ に関する帰納法が用いられるが，$\mathrm{RM}_\delta = 1$ の場合の証明に，アーベル多様体の基本性質が巧妙に用いられている．

H が「ほとんど」階数 1 の場合：

定理 6.8 (Proposition 2.1 [6])　L を $\aleph_0$-飽和な微分閉体，$k_0 \subset L$ をその定数体とする．A を L 上定義されたアーベル多様体，H をほとんど強極小かつ連結な δ-定義可能，すなわち H は δ という微分作用素を用いて定義されている群とする．

H が 1-基底的でないとすると，次の 2 つのことが成り立つ．

(1) k_0 上定義されたアーベル多様体 S と，H のザリスキー閉包 $\overline{H}$ から S の上への 1 対 1 な射 f が存在して，$f(H) = S(k_0)$ である．

(2) X を L 上定義された A の部分多様体で $X \cap H$ は X で稠密であるとする．このとき，k_0 上定義された S の部分多様体 X_0 が存在して $X = f^{-1}(X_0)$ である．

証明　(1) H は「ほとんど」強極小なので，定義より $H \subseteq \mathrm{acl}(B)$ となる強極小集合 B が存在する．微分閉体の強極小集合はザリスキー幾何になる．H が 1-基底的でないから，ザリスキー幾何 B は非局所モジュラー，すなわち豊富である．ザリスキー幾何の基本定理から，ある代数的閉体が B に定義される．この代数的閉体は，Sokolovic の定理より k_0 と δ-定義同型になっている，すなわち同型写像が δ を用いた論理式で表現できる．このことを使うと，H を k_0 上定義された群 G に写すことができる．正確には，δ-定義可能な群 $G \subset k_0^l$ (l は自然数) と，核が有限な δ-定義可能な上への準同型 $h : H \longrightarrow G$ が存在する．

$n = |\ker(h)|$ とおく．$g_0 : G \longrightarrow H$ を次のように定義する．$y \in G$ とすると h は上への準同型なので $y = h(x)$ となる x が存在する．このような x を 1 つとり，$g_0(y) = nx$ とする．g_0 が δ-定義可能な準同型になるので，$G_1 = G/\ker(g_0)$ とおく．$\ker(g_0)$ は有限で，g_0 は全射になっている．よって $G_1 \subset k_0^m$ (m は自然数) となっていて，G_1 は δ-定義可能である．g_0 を用いて，δ-定義可能な同型写像 $g : G_1 \longrightarrow H$ が存在することもわかる．

したがって G_1 は k_0 上 δ-定義可能な群になっている．k_0 上では $\delta(x) = 0$ なので，G_1 は代数的閉体としての k_0 で定義可能である．G_1 は k_0 で体の言語を用いて定義可能なので，Weil-Hrushovski-van den Dries の定理により G_1 は k_0 上の代数群になっている．すなわち，k_0 上定義された代数群 G_2 が存在し $G_2(k_0) = G_1$ かつ，同型 $g : G_1 \longrightarrow H$ の $G_2(k_0)$ への制限 $g|G_2(k_0)$ は有理写像になっている．

実は，G_2 は k_0 上のアーベル多様体になっている．$\overline{H}$ を L におけるザリスキー閉包とすると，$g|G_2(k_0)$ を $\overline{g} : G_2(L) \longrightarrow \overline{H}$ へ自然に拡張できる．$\overline{H}$ は A の閉部分群なのでアーベル多様体になっている．

G_2 のアーベル多様体としての性質から $\ker(\overline{g}) = \{0\}$ であることがわかる．$\overline{g}$ の逆写像を f とすれば，f は $\overline{H}$ から G_2 の上への 1 対 1 な射になっていて，G_2 は

A の部分アーベル多様体になっている．$G_2 = S$ とおけば $f(H) = S(k_0)$ になっていることが導かれる．

(2) (1) で得られた f に対し $f(X) = X_0$ とおく．$X \cap H$ が X でザリスキー稠密なので，$f(X)$ は $f(X \cap H)$ のザリスキー閉包になっている．$f(X \cap H) \subseteq f(H) \subseteq k_0^m$ より，$f(X \cap H)$ のザリスキー閉包も k_0 で定義されていなければならない．よって $X_0 = f(X) = \overline{f(X \cap H)}$ は k_0 上で定義されている． □

H が有限の Morley 階数を持つ場合： $\mathrm{RM}_\delta(H) = 1$ の場合に帰着するのであるが，ここではモデル理論，そのなかでも安定性理論が威力を発揮する．また L が $\aleph_0$-飽和であることが特に必要になってくる．

やや雑な言い方をすれば，H は $H_1 + \cdots + H_r$ という有限直和の形をしていると思ってよい．ここで各 H_i は H の部分群で，いずれも「ほとんど」階数が 1 である．このとき H が 1-基底的でないという条件から，ある H_i が 1-基底的でないことが示される．この H_i に対して階数が 1 の場合の証明を適用する．ここでは，幾何的モデル理論の技術的な議論が駆使される．階数 1 の場合に活躍した Sokolovic の定理，Weil-Hrushovski-van den Dries の定理，ザリスキー幾何の基本定理などは必要ないが，安定群のモデル理論の基本定理である Zilber 既約性定理 (定理 3.108) が重要な働きをする．

注意 6.9　2002 年初頭に標数 0 の場合の証明が簡素化された．まず第一に，ザリスキー幾何を用いる議論が全く不要になっている．また，モーレー階数に関する帰納的証明法も不要になった．Manin-Buium 写像の議論は依然として必要であるが，Manin-Buium 写像の核を用いて直接結論を得ることが可能になった．詳しくは Pillay と Ziegler の論文 [35] 参照のこと．

6.2.2　正標数の場合

正標数の場合は分離閉体のモデル理論を用いる．最初の $k \subset K$ という 2 つの代数的閉体は，k は初めの代数的閉体，$k \subset L$ は分離閉体に置き換えられる．ランク有限な群 Γ を $H = \cap p^n A(L)$ という群に置き換える．各 n について，$p^n A(L)$ は論理式で定義可能なので，H は無限個の定義可能な群の共通部分になっている．このような集合を ∞-定義可能という．$k = \cap L^{p^n}$ になっている．標数 0 の場合同様，H

がほとんど階数 1 の場合と有限階数の場合に分けて証明される．ほとんど階数が 1 の場合は，次の定理を証明する．

定理 6.10 ([6] Proposition 3.5) $k_0 \subset L \subset \tilde{L}$ とし，k_0 は代数的閉体，L は分離閉体，$\tilde{L}$ は L の代数閉包とする．A は L 上定義されたアーベル多様体，H は A の ∞-定義可能な，連結部分群でほとんど階数が 1 とする．H が 1-基底的でないとすると，次の 2 つのことが成り立つ．

(1) k_0 上定義されたアーベル多様体 S と，H の $\tilde{L}$ におけるザリスキー閉包 $\overline{H}$ から $S(\tilde{L})$ の上への 1 対 1 な射 f が存在して $f(H) = S(k_0)$ である．

(2) X を L 上定義された A の部分多様体とし，$\overline{X \cap H} = X$ とする．このとき，S の部分多様体 X_0 (X_0 は k_0 上定義されている) が存在して，$X = f^{-1}(X_0)$ である．

標数 0 の場合と同様な議論が展開されるが，∞-定義可能な集合が絡んでいるので，モデル理論的議論はより技術的になる．SCF_p においても，Morley 階数に似た階数が定義される．Hrushovski の定理により，この階数が 1 の集合はザリスキー幾何になる．標数 0 の場合と同じように，H が 1-基底的でないとすると，ザリスキー幾何が豊富であることになり，代数的閉体 F が構成される．F が k_0 と同型でなければ意味がないが，これは M.Messmer が学位論文で証明した定理によって保証されている．

有限階数な場合： 標数 0 の場合の分解定理を用いた議論と同様の議論を展開する．ここでも，∞-定義可能性が係わっているので，モデル理論的議論はより複雑になる．

注意 6.11 標数 0 の場合と異なり，依然としてザリスキー幾何の議論は必要である．本質的にザリスキー幾何の議論が必要かどうかは不明であるが，正標数の代数幾何学の一般論を展開する道具あるいは場として，ザリスキータイプによって定義されるザリスキー幾何の性質をさらに詳しく調べることは興味ある研究課題である．

6.3 Manin-Mumford 予想の新しい証明

標数 0 の代数閉体 K と $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ に対して (K, σ) をモデル理論的に考察する．すなわち，次の性質 $(*)$ をもつような (K, σ) の集まり (クラス) を考える．

$(*)$ K 上定義された σ-方程式が K の拡大モデルで解を持てば K でも解を持つ．

このような性質をもつ (K,σ) たちのクラスの性質を 1 階の論理式で書いたものが ACFA この ACFA は安定な理論ではなく，単純理論と呼ばれるものの 1 つになっている．

ここでは ACFA における 1-基底群の性質がどう応用されるかに着目し，数体 k 上定義されたアーベル多様体 A に対し,

$$\mathrm{Tor}_{p'}(A) = \{a \in \mathrm{Tor}(A) : \exists n(na = 0 \wedge p \not| \, n)\}$$

に関する定理のみを解説する．

数体 k の整数環の素イデアルを $\wp$ とし，剰余体 $k_\wp$ (標数 p，元の個数 q の有限体) を考える．A の $\wp$ による還元 $A_\wp$ が $k_\wp$ 上定義されたアーベル多様体として，A の次元と同じ次元を持つとき，$\wp$ は A の良い還元 (good reduction) を与えるという．このような素イデアル $\wp$ を 1 つ固定する．

補題 6.12　自己同型 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}/k)$ と，1 の冪乗根を根に持たない多項式 $F[T] \in \mathbb{Z}[T]$ が存在して，$F(\sigma)$ を $\mathrm{End}(A(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}))$ の元と考えたとき，任意の $a \in \mathrm{Tor}_{p'}(A)$ に対して $F(\sigma)(a) = 0$ となるようにできる．

このような σ の存在は，Weil の古典的な定理によって与えられる ([39], IX, X 節)．すなわち，$k_\wp$ の Frobenius 自己同型 $\Phi_q : x \longrightarrow x^q$ にたいして,

$$F(\Phi_q)(a) = 0 \quad (\forall a \in A_\wp(k^{\mathrm{alg}}))$$

をみたすような 多項式 $F[T] \in \mathbb{Z}[T]$ の存在は，有限体上定義されたアーベル多様体の自己同型と，Frobenius 自己同型の特性多項式に関する Weil の定理から導かれる．$\wp$ は A の良い還元を与えているので Φ_q を $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}/k)$ に持ち上げることができる．Hensel の定理より $\mathrm{Tor}_{p'}(A)$ から $\mathrm{Tor}_{p'}(A_\wp)$ への同型が得られる．よって $F(\sigma)$ は $\mathrm{Tor}_{p'}(A)$ で 0 になる．σ-定義可能な群の 1-基底性については，次の補題が基本的である．

補題 6.13　A を固定体 $\mathrm{Fix}(\sigma) = \{x : \sigma(x) = x\}$ 上定義されたアーベル多様体，$F(T) \in \mathbb{Z}[T]$ とする．$H_\sigma = \ker(F(\sigma)) = \{a \in A : F(\sigma)(a) = 0\}$ とおく．H_σ が 1-基底的であることと，F が 1 の冪乗根を根に持たないことは同値である．

これら 2 つの定理を用いて次が証明される．

定理 6.14　$\mathrm{Tor}_{p'}(A) \cap X = \bigcup_{i=1}^{M} a_i + \mathrm{Tor}_{p'}(B_i)$. ここで，各 B_i は A の部分アーベル多様体で，$M \leq c \deg(X)^{(2d+1)(2^{d \cdot \dim(X)})}$. 定数 c は A だけに依存する.

証明のスケッチ　$\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}/k)$ と $F[T] \in \mathbb{Z}[T]$ を考える. 多項式 $F[T] = \sum_{i=0}^{2d} c_i T^i$ は Weil の理論によって存在が保証されている. $(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}, \sigma) \preceq (K, \sigma)$ は万有差分体とする. ここで，

$$H_\sigma = \left\{ \sigma \in A(K) : \sum_{i=0}^{2d} c_i \sigma^i(a) = 0 \right\}$$

とおく. H_σ は $A(K)$ の σ-定義可能部分群である. $F[T]$ は 1 の冪乗根を根として持たないので，H_σ は 1-基底群である. よって $X \cap H_\sigma$ は 有限個の σ-定義可能部分群の剰余類のブール和になっている. したがって $X \cap H_\sigma$ のザリスキー閉包に対して，$\overline{X \cap H_\sigma} = \bigcup_{i=1}^{M} b_i + B_i$ である. 各 i について $b_i + B_i \subset X$ なので，$X \cap \mathrm{Tor}_{p'}(A)$ は $a + \mathrm{Tor}_{p'}(B)$ (B は A の部分アーベル多様体) の形の有限個の和になっている. M の評価については，[8] を参照していただきたい.　□

A

予備知識

この本は 1 章から読み始めることを仮定している．モデル理論に関して，知らない概念，定義や定理が出てきたところで確認していただきたい．代数学や代数幾何学に関する基本事項や参考文献は，必要な部分で本文中に引用してある．

A.1　基本的な定義

基本的な定義をまとめておく．すべて標準的なものだが，いろいろな参考文献で若干記法が異なっていたりするので本書での用法を確認していただきたい．

定義 A.1 (および諸注意)　(1) モデル理論は，論理式で定義される集合を研究対象とする．したがって，論理式とは何かを正確に理解しておく必要がある．論理記号 $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\longrightarrow$, 量記号 $\forall$, $\exists$, 変数記号 $x_1, \cdots$, 定数記号 $c_1, \cdots$, 関数記号 $f_1, \cdots$, 述語記号 $P_1, \cdots$ を用いて論理式を書く．例えば,「どんな 2 次方程式も根を持つ」ということは，乗法を表す「$\cdot$」，加法を表す「$+$」，および 0 と等号を用いて，

$$\forall a \forall b \forall c \exists x (a \neq 0 \longrightarrow a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c = 0)$$

と書くことができる．

(2) 体のモデル理論を展開するときには，2 変数関数記号として $+, \cdot$，1 変数関数記号として $-$，定数記号として 0, 1 を用い，まとめて $L_r = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$ と書く．記号 $-$ を 2 変数記号として導入することも可能で，その場合は公理の形が多少異なってくるが，実質的な内容は同じである．一般の場合は，使用する定数記号，関数記号，述語記号をまとめたもの L を考え，**言語**と呼ぶ．特に断らなければ，等号はつねに言語に入っているものとする．

(3) 第一階の論理式のみを用いる．したがって,「ある関数が存在して」とか,「任意の部分集合について」といった表現は論理式で書くことができない．

(4) 同様に「ある自然数が存在して」とか「任意の自然数について」といった表現も扱うことができない．もちろん算術のモデル理論を展開するときにはこれらは表現可能であるが，この本で解説するモデル理論ではこの種の表現ができないような理論のみを扱う．

(5) 論理式 $\forall a \forall b \exists x\,(x^2+ax+b=0)$ において，変数 a, b は $\forall$，x は $\exists$ によって束縛されている．このような変数を束縛変数という．一方，論理式 $x^2+ax+b=0$ においては，変数 a, b, x は束縛されておらず自由であるという．このような変数を自由変数と呼ぶ．自由変数の現れない論理式を**文**と呼ぶ．ただし，定数記号は文に現れてもよい．

(6) 量記号の現れない論理式を Δ_0-論理式と呼ぶ．どのような論理式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ に対しても，論理的に同値な**冠頭標準形**と呼ばれる論理式 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ が存在する．ここで $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ は，

$$Q_1y_1\cdots Q_my_m\ \eta(\bar{y},\bar{x})$$

の形をしていて，各 Q_i は $\exists$ または $\forall$，$\eta(\bar{y},\bar{x})$ は Δ_0-論理式である．すなわち，$\eta(\bar{y},\bar{x})$ に量記号は現れない．

論理式 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=Q_1y_1\cdots Q_my_m\ \eta(\bar{x},\bar{y})$ の，量記号の現れ方に着目して，冠頭標準形で書かれた論理式を分類する．

(i) $Q_1,\cdots,Q_m$ がすべて $\exists$ である場合，$\varphi(\bar{x})$ を Σ_1-論理式と呼ぶ．

(ii) $Q_1,\cdots,Q_m$ がすべて $\forall$ である場合，$\varphi(\bar{x})$ を Π_1-論理式と呼ぶ．

(iii) $\exists y_1\cdots\exists y_i\underbrace{Q_1z_1\cdots Q_jz_j\eta(\bar{y},\bar{z},\bar{x})}_{\Pi_n\text{-論理式}}$ の形をした論理式を Σ_{n+1}-論理式と呼ぶ．

(iv) $\forall y_1\cdots\forall y_i\underbrace{Q_1z_1\cdots Q_jz_j\eta(\bar{y},\bar{z},\bar{x})}_{\Sigma_n\text{-論理式}}$ の形をした論理式を Π_{n+1}-論理式と呼ぶ．

つまり，冠頭標準形の中で，$\exists$ や $\forall$ が交互に連続して現れる様子に着目して，論理式の形の複雑さを分類する．例えば冒頭にあげた「どんな 2 次方程式も解を持つ」という文は Π_2-文である．

(7) 言語 L の論理式を解釈できるような数学的構造を L-**構造**と呼ぶ．

(8) A, B を 2 つの L-構造とする．

• 言語 L の任意の文 φ に対して，φ が A で正しいことと，B で正しいことが同値であるとき，A と B は**初等同値**であるといい，$A \equiv B$ と書く．

• A が B の部分集合であり，L の記号の解釈が A と B で一致するとき，すなわち定数記号の解釈が同じで，関数記号と述語記号に関しては，B の解釈の A への制限が一致するとき A を B の**部分構造**といい，$A \subseteq_L B$ と書く．混乱の恐れがないときは，添え字 L を省略する．

• $A \subseteq_L B$ とする．任意の L-論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ と $a_1, \cdots a_n \in A$ に対して，

$$A \models \varphi(a_1, \cdots, a_n) \Longleftrightarrow B \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$$

であるとき，A は B の**初等部分構造**，B は A の**初等拡大**といい，$A \preceq B$ と書く．任意の L-論理式ではなく Σ_n-論理式について同様のことが成り立つとき，$A \preceq_n B$ と書く．

(9) 言語 L の文からなる無矛盾な集合 T を**理論**と呼ぶ．T の各文が成り立つような L-構造を T の**モデル**と呼ぶ．ある理論 T のモデル M を考える．T の言語 L の論理式 $\varphi(x)$ に対して，

$$\varphi(M) = \{m \in M : M \models \varphi(m)\}$$

を，φ で定義された部分集合と呼ぶ．論理式で定義される集合を**定義可能**な集合という．例えば，代数曲線などは定義可能な集合である．$\varphi(M)$ が有限集合のとき，φ を**代数的な論理式**と呼ぶ．$\varphi(M)$ が 1 点集合のとき，φ を**有理的な論理式**と呼ぶ．

• 集合 A 上代数的な論理式を満たす元を集めたものを $\mathrm{acl}(A)$ と書く．

• 有理的な論理式を満たす元を集めたものを $\mathrm{dcl}(A)$ と書く．

(10) L を言語，A を L-構造とする．A の各要素に対応する新たな定数記号を L に付加した言語を $L(A)$ と書く．

(11) L を言語，T を L-理論とする．$L^+ \supseteq L$ に対して $T^+ \supseteq T$ が次の 2 つの性質を持つとき，T^+ を T の Skolem 化と呼ぶ．

(i) 任意の L-構造 M は，$M \models T$ であれば T^+ のモデルに拡張できる．

(ii) 任意の L^+-論理式 $\varphi(\bar{x}, y)$ に対して L^+ の項 t が存在して

$$T^+ \vdash \forall \bar{x}\,(\exists y \varphi(\bar{x}, y) \longrightarrow \varphi(\bar{x}, t(\bar{x})))$$

項 t を Skolem 関数と呼ぶ．理論 T 自身が性質 (ii) をもつとき，T は Skolem 関数を持つという．Skolem 関数を持つ L-理論を考える．L-構造 M と $A \subseteq M$ に対して，A で生成される L-構造を A の Skolem 閉包と呼ぶ．

(12) L を言語，A を L-構造とする．

• $\mathrm{Diag}_0(A) = \{\phi : A \models \phi$ かつ ϕ は $L(A)$ の素式，または素式の否定 $\}$ を A の**図式**と呼ぶ．A が群の場合，$\mathrm{Diag}_0(A)$ は群の演算表に相当する．

• $\mathrm{Diag}(A) = \{\phi : A \models \phi$ かつ ϕ は $L(A)$-文 $\}$ を A の**初等図式**と呼ぶ．これは A で成り立つ $L(A)$-文全体の集合である．A の $L(A)$-理論と同じことであるから，$\mathrm{Th}_{L(A)}(A)$ と書いても同じことである．

(13) M をモデル，$A \subset M$ を真部分集合とし，$a \in M \backslash A$ とする．$L(A)$-論理式の集合

$$\mathrm{tp}_M(a/A) = \{\varphi(x) : \varphi(x) \text{ は } L(A)\text{-論理式で } M \models \varphi(a)\}$$

を a の M における A 上の **1 変数完全タイプ**と呼ぶ．n 変数完全タイプも同様に定義される．$\bar{a}$ の M における A 上の n 変数完全タイプ全体の集合を $S_n^M(A)$ と書く．M が明らかな場合は省くことが多い．$\mathrm{tp}_M(a/A) = \mathrm{tp}_M(b/A)$ のとき，$a \equiv_A b$ と書く．M は文脈から明らかな場合が多いので，特に明示しない．

(14) 完全タイプ全体の集合 $S_n^M(A)$ を位相空間と考えることができる．$\phi(\bar{v})$ を $L(A)$-論理式とする．自由変数は $\bar{v} = v_1, \cdots, v_n$ とする．

$$[\phi(\bar{v})] = \{p \in S_n^M(A) : \phi \in p\}$$

とおく．$[\phi \wedge \psi] = [\phi] \cap [\psi]$ かつ $[\phi \vee \psi] = [\phi] \cup [\psi]$ がすぐに分かる．各 $[\phi]$ を基本開集合とすることによって $S_n^M(A)$ に位相を定義することができる．この位相を **Stone 位相**，$S_n^M(A)$ を **Stone 空間**と呼ぶ．$[\phi] = S_n^M(A) \backslash [\neg\phi]$ なので $[\phi]$ は閉集合であることも分かる．

(15) $p \in S_n^M(A)$ とする．$\{p\}$ が $S_n^M(A)$ の開集合であるとき，p を**孤立タイプ**と呼ぶ．p が孤立タイプであるときは $\{p\} = [\phi]$ となる論理式 ϕ が存在する．さらに p に属する任意の $L(A)$-論理式 $\psi(\bar{v})$ に対して，

$$\mathrm{Th}_A(M) \models \forall \bar{v}(\phi(\bar{v}) \longrightarrow \psi(\bar{v}))$$

である．このことを $\phi \models p$ とか $\phi \vdash p$ と書く．

(16) ある要素 a がタイプに属するすべての論理式を満たしているとき，a はそのタイプを**実現する**という．

(17) M を理論 T のモデルとする．κ を無限基数 ($\aleph_0$ とか $\aleph_1$) とする．M の任意の部分集合 A ($|A| < \kappa$) に対して，A 上の任意のタイプが M で実現されているとき，M は κ-飽和であるという．

(18) T を理論とする．T のモデルたちが互に初等同値であるとき，T を**完全**という．すなわち，M_1, M_2 を T のモデルとすると，$M_1 \equiv M_2$ である．T の言語を L とする．このとき,「任意の L-文 φ に対して，φ または $\neg\varphi$ が T に属す」ということと，T が完全であるということは同値である．

(19) T を理論，κ を非常に大きな無限基数とする．κ-飽和な T のモデル $\mathfrak{M}$ を T の**万有モデル**と呼ぶ．$\mathfrak{M}$ は次のような性質を持つ．

(i) $M \models T$ かつ $|M| \leq \kappa$ とすると，M から $\mathfrak{M}$ への初等埋め込みが存在する．

(ii) $M \prec \mathfrak{M}$ とし，$f : M \longrightarrow N$ ($|N| < \kappa$) を初等同型とする．このとき初等同型 $j : N \longrightarrow \mathfrak{M}$ で j の M への制限が恒等写像になっているものが存在する．

(iii) T のモデルで，濃度が κ 未満のものはすべて $\mathfrak{M}$ の初等部分モデルになっていると考えることができる．

万有モデルは，理論のいろいろなモデルの間の関係をしらべるときや，個々のモデルではなく理論全体に関係する性質を調べるときに非常に便利である．

(20) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は特に断らなければ，それぞれ自然数全体，整数全体，有理数全体，実数全体，複素数全体の集合を表す．また，ω は最小の無限順序数とする．

A.2　基本的ないくつかの定理

Cantor の往復論法は知っているものとする．次に，モデル理論の基本的な定理をまとめて紹介しよう．最初は，初等部分構造になっているかどうかを判定する，非常に便利な判定法である．

定理 A.2 (Tarski-Vaught テスト)　L を 1 階の言語とし，$A \subseteq B$ をそれぞれ L-構造とする．A は B の部分構造．このとき $A \preceq B$ であるための必要十分条件は

次である.

(∗) 任意の L-論理式 $\varphi(\overline{x}, y)$ と A の有限列 $\overline{a}$ に対して，もし $B \models \exists y \varphi(\overline{a}, y)$ ならば $B \models \varphi(\overline{a}, d)$ が成立つような元 d が A に存在する.

L-構造の拡大列 $A_1 \subseteq \cdots \subseteq \cdots A_i \subseteq \cdots$ を考える．各 $A_i \subseteq A_{i+1}$ が初等拡大になっている場合は各 A_i の性質が $\bigcup_{i \in \omega} A_i$ でも保存されている，すなわち次が成り立っている.

定理 A.3 (初等拡大列定理)　$A_1 \preceq A_2 \preceq \cdots \preceq A_i \preceq \cdots$ を L-構造の初等拡大列とする．このとき $\bigcup_{i \in \omega} A_i$ は各 A_i の初等拡大である.

次の定理は，基本中の基本である.

定理 A.4 (完全性定理)　理論 T が無矛盾であることと，T がモデルを持つことは同値である.

次の形で用いられることもある.

T を L-理論，φ を L-文とすると，

$$T \models \varphi \Longleftrightarrow T \vdash \varphi$$

よって Ψ を L-文の集合とすると，

$$T \models \Psi \Longleftrightarrow T \vdash \Psi$$

本書で最も活躍する定理の 1 つであるのが次の定理である．同値な形がいくつかあるがそれらについては 1.6 節で詳しく説明する.

定理 A.5 (コンパクト性定理)　理論 T が無矛盾であることと，T の任意の有限部分集合 T_0 が無矛盾であることは同値である.

コンパクト性定理の系として，完全タイプの集合である Stone 空間 $S_n^M(A)$ がコンパクト位相空間であることも容易に示される.

無限モデルの初等拡大で，濃度がいくらでも大きなものが存在することを主張するのが次の定理である.

定理 A.6 (上方 Löwenheim-Skolem 定理)　理論 T が無限モデル M を持つとする．このとき $|M|$ より大きな任意の無限基数の濃度を持つ T のモデル N で $M \prec N$ となっているものが存在する．

逆に，モデルの濃度を言語の濃度まで下げることができるということを主張するのが次の定理である．

定理 A.7 (下方 Löwenheim-Skolem-Tarski 定理)　T を理論とする．$\kappa \geq \lambda \geq |T|$ を無限濃度とする．T は濃度 κ のモデル N を持つとする．$X \subset N$ かつ $|X| \leq \lambda$ とする．このとき，T のモデル M で $X \subset M$, $|M| = \lambda$ かつ $M \preceq N$ であるようなものが存在する．

定理 A.8　T を理論，M を T の飽和モデルとする．$|A| < |M|$ であるような $A \subset M$ をとる．$L(M)$-論理式によって定義されている集合 $X \subset M^n$ を考える．このとき

$$(X \text{ は } A \text{ 上定義可能}) \iff \text{任意の } \sigma \in \mathrm{Aut}(M/A) \text{ に対して } \sigma(X) = X$$

である．ただし $\sigma \in \mathrm{Aut}(M/A)$ は A 上恒等写像であり，$\sigma(X)$ と X は集合として等しいとする．

A.3　術語とその翻訳に関する注意

モデル理論の歴史は比較的浅く，とりわけ「安定性理論」については日本ではあまり知られていない．術語の翻訳が定着している訳ではないので，いくつかの重要なものに関する注意をまとめておく．

(1) categorical は範疇的，complete は完全 (例：completeness theorem 完全性定理，model complete モデル完全)．

(2) divisible は可約 (例：divisible abelian variety は可約なアーベル多様体)．群としての可約性に対して用いる．閉集合の既約性 (irreducibility) の否定の意味ではない．また，定義可能集合の既約性 (indecomposability) の否定の意味でもない．可除という訳語も考えられる．

(3) elementary は初等的 (例：elementarily equivalent 初等同値，elementary extention 初等拡大)．elementary を基本的と訳す本もある．

(4) generic は一般的 (例 : generic point 一般点, generic type 一般タイプ). 代数幾何では generic point を生成点と訳すが, 本書では「一般的」と訳すことにする.

(5) homogeneous は均質 (例 : homogeneous model 均質モデル).

(6) indecomposable, irreducible は共に既約と訳す. 前者は定義可能集合に対して, 後者は閉集合に関する概念である.

(7) indiscernible は一様 (例 : indiscernible sequence 一様列, order indiscrnibles 順序一様集合).

(8) minimal は極小的, strongly minimal は強極小的.

(9) principal は単項 (例 : principal type 単項タイプ).

(10) stable は安定的 (例 : stable theory 安定的理論, ω-stableω-安定的), stationary は定格的 (例 stationary type は定格的タイプ, あるいは定格タイプ).

(11) type はタイプ (例 : complete type 完全タイプ).

B

文献ノート

最後に本書執筆に際して参考にしたモデル理論関係の教科書や，個別の話題に関する論文などについて解説する．

B.1 標準的教科書

(1) John T.Baldwin, *Fundamenentals of Stability Theory,* Springer, 1988.

ω-安定理論に関する Vaught 予想と，Morley 予想の 2 つを S.Shelah が解決した．その解説が後半の目標である．

(2) Alexander Borovik and Ali Nesin, *Groups of Finite Morley Rank,* Oxford University Press, 1994.

安定群に関する標準的な教科書である．Cherlin の定理解説の参考にした．

(3) Steven Buechler, *Essential Stability Theory,* Springer, 1996.

Hrushovski の学位論文で証明された，本書定理 4.31 の解説の参考にした．Baldwin の本に比べると読みやすい．

(4) C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model Theory 3rd Edition*, North-Holland, 1990.

モデル理論の定番的教科書である．安定性理論に関する解説はないが，その他の重要な結果は網羅されている．

(5) Wilfrid Hodges, *Model Theory, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 42,* Cambridge University Press, 1993.

772 ページもある大著である．基本的なことは網羅してあるので，手元にあると事

典代わりに便利である．群図表から群を定義する定理の解説の参考にした．ただし，1 つの定理を証明するときに，本の各所にある補題を引用しつつ証明するという書き方をしていて読みづらい．

(6) David Marker, 2002 年夏 *Springer Graduate Texts in Mathematics* の一冊として出版予定のモデル理論の教科書.

著者は o-minimal (順序極小) 理論関係の仕事が多いが，モデル理論全般に対する造詣が深い．University of Illinoi at Chicago (イリノイ大学シカゴ校) における大学院の講義ノートがもとになっているそうである．本書執筆の随所で参考にした．余談になるが，著者のブリッジの腕前は大したものらしい．ひょっとすると数学者としてよりは，ブリッジの方でより有名かもしれない．6 章の最後に,「コスモポリタン」という名の著者お薦めのカクテルが紹介されているのでカクテル好きの方は試していただきたい．

(7) Anand Pillay, *An Introduction to Stability Theory,* Oxford University Press, 1983.

筆者が安定性理論を学び始めたときに出版された懐かしい本である．基本事項を学ぶのに最適な教科書である．Morley の定理と Baldwin-Lachran の定理は 9 章に解説してある．

(8) Anand Pillay, *Geometric Stability Theory,* Oxford University Press, 1996.

これは (7) の続編である．Hrushovski, Newelski, Zilber らの重要な結果が解説されている．群図表から群を定義する方法や 1-基底群の解説の参考にした．

(9) Bruno Poizat, *Stable Groups,* American Mthematical Society, 2001.

安定群の教科書．定理 4.31 解説の参考にした．Buechler による解説は，Poizat による解説をさらに補っているので，両者を比べながら読むのも一興かも知れない．Reineke の定理や Cherlin の定理も解説してある．もともとはフランス語版による自費出版であった．英語帝国主義といっても過言ではないような現状に対して，一貫して異議を唱える著者の態度には敬服せざるをえない (本人はフランス人であるが，英語の達人であるので彼の主張には説得力がある).

(10) Bruno Poizat, *A Course in Model Theory*, Springer, 2000.

モデル理論の教科書．1985 年にフランス語で出版された本の英訳である．(9) で

も説明したが，英語支配を嫌ってあくまでフランス語での出版にこだわったので，Springer 社と折り合いがつかなかった．15 年後に，Springer 社から英訳が出版された訳である．

(11) Gerald Sacks, *Saturated Model Theory*, Benjamin, 1972.

著者は，帰納理論 (Recursion Theory) の大家である．Baldwin の学位論文が書かれた直後に書かれている．簡潔かつ明晰に書かれている名著の 1 つである．

(12) Saharon Shelah, Classification theory, North-Holland (2nd version), 1990

安定性理論の「バイブル」とも呼ばれる本である．一階の理論全体を分類しようという遠大な思想に基づいて執筆されている．ただ決して読みやすい本ではない．

(13) 坪井明人，モデルの理論，河合文化教育研究所，1997.

安定性理論入門に最適である．ツボを心得た筆者の明晰な解説を読み進むうちに短期間 (1 日 10 頁のペースで 2 週間) で基本が身に付くであろう．

(14) Frank O.Wagner, *Stable Groups,* Cambridge University Press, 1997

安定群の教科書であるが，(2) や (8) とはかなり執筆スタイルが異なる．前半の群論部分に時間をかけすぎると，後半に行く前に息切れしてしまう恐れがある．群図表から群を構成する方法は 4 章 3 節に詳しく解説されている．Hrushovski の学位論文にある定理 4.31 の一般化が定理 4.3.5 として証明されている．このような一般化は，ザリスキー幾何を一般化しそこで体を構成するときに必要になってくる．

(15) Frank O.Wagner, *Simple Theories,* Kluwer Academic Publishers, 2000.

安定性理論をさらに一般化した「単純理論」と呼ばれる理論に関する初めての教科書である．

B.2　いくつかの話題

(1) J.Robinson の定理：$\mathbb{Z}$ が $(\mathbb{Q},+,\cdot,1,0)$ で定義可能であることについて．

Dan Flath and Stan Wagon, How to Pick Out the Integers in the Rationals: An Application of Number Theory to Logic, The American Mathematical Monthly, vol 98, no 9, 1991.

(2) A.Wilkie の定理：Liouville 関数に関して Schanuel 予想が成り立つことについて．

これは, Wilkie が 2000 年の Logic Colloquium にて発表した結果である. "*Liouville Functions*" という題の手書草稿を参考にした.

(3) 4 章の最後で解説した, 代数曲線族上に代数的閉体を定義することについて.

David Marker and Anand Pillay, Reducts of $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ which contain $+$, Journal of Symbolic Logic, vol 55, num 3, 1990.

加法が与えられているような構造で, 代数曲線族から乗法を定義する方法が紹介されている. 合成関数の微分を利用して, 曲線の傾きによって乗法を定義するというのが発想である. 豊富なザリスキー幾何で体を再構成する際には, 加法も曲線の傾きの概念も事前には与えられていないのでそれらを自前で定義しつつ体を構成していく訳である. いきなりザリスキー幾何の一般論を展開する前に, この定理で感じをつかんでおく方が分かりやすいだろう (以前, Zilber が筆者に忠告してくれた).

B.3 Hrushovski の仕事について

(1) 本人の論文

(i) Ehud Hrushovski and Boris Zilber, Zariski Geometries [25]. 5 章は, この論文の解説である. 残念ながらほんの一部分しか解説することができていない. ザリスキー幾何に関する本格的教科書が書かれることを希望してやまない.

(ii) The Mordell-Lang Conjecture for Function Fields [19]. 6 章のもとになっている重要な論文である. けっして読みやすい論文ではないので E.Bouscaren の解説 [6] を参考にしながら読み進むのが賢明であろう.

(iii) The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields [23]. 論文の提出から出版までに 6 年かかっている. Hrushovski の論文にはよくあるケースである. 内容が重要なので, 出版される前に preprint が出回り, 解説記事が沢山書かれるというこれまた Hrushovski の論文によくあるケースである.

(iv) Proof of Manin's theorem by reduction to positive characteristic [22]. 幾何的 Mordell-Lang 予想の証明は, 標数 0 と正標数の場合に分けられる. 標数によらず, 統一的原理にもとづいて証明した点が Hrushovski の功績の大きな部分である. しかし, 標数 0 の場合に関しては A.Buium が別の方法で解いていたし, 正標数の場合もいくつかの部分解が存在した. すべての正標数に関して一挙に解決したのは

Hrushovski が最初であるが，実はすべての正標数の場合に正しければ，標数 0 の場合も正しいことを示しているのがこの論文である．

(2) 他のモデル理論研究者による，Hrushovski の結果の解説

(i) E.Bouscaren [6]，本書 6 章の幾何的 Mordell-Lang 予想解決に関する解説は彼女の論文によるところが大きい．

(ii) E.Bouscaren [8]，Manin-Mumford 予想別証明の解説の参考にした．

(iii) Z.Chatzidakis [11]，Manin-Mumford 予想別証明の解説の参考にした．

(iv) A.Pillay，1994 年の国際数学者会議における Logic 部門の全体講演．Hrushovski の幾何的 Mordell-Lang 予想解決の解説を始めて大きな国際集会で行った．

(v) A.Pillay [32]．一般の数学者向けに書かれた，幾何的 Mordell-Lang 予想解決の解説論文である．

(vi) A.Pillay [33]．Manin-Mumford 予想の別証明が手際よく解説されている．体の自己同型の特性多項式に関する A.Weil の古典的結果の証明が概説されている．

(vii) B.Poizat，HLM, Séminaire Bourbaki. ブルバキセミナーにおける，幾何的 Mordell-Lang 予想解決の解説である．

参考文献

[1] J.T.Baldwin, **Fundamenentals of Stability Theory**, Springer, 1988.

[2] A.Borovik and A.Nesin, **Groups of Finite Morley Rank**, Oxford Logic Guides No. 26, Clarendon Press 1944.

[3] S.Buechler, **Essential Stability Theory**, Springer, 1996.

[4] A.Buium, Intersections in jet spaces and a conjecture of S.Lang, Ann. of Math. (2) 136 (1992), pp.557-567.

[5] E. Bouscaren, The Group Configuration — after E. Hrushovski, in **The Model Theory of Groups**, A. Nesin, A. Pillay 編 Notre Dame Mathematical Lectures, No. 11, University of Notre Dame Press, 1989

[6] E.Bouscaren, Proof of the Mordell-Lang conjecture for function fields, in **Model Theory and Algebraic Geometry**, LNM 1696, Springer 1998.

[7] E.Bouscaren, An introduction to independence and local modularity in **Algebraic Model Theory** edited by B.T.Hart et al., Kluwar Academic Publisher, 1997.

[8] E.Bouscaren, Théorie des modèles et conjecture de Manin-Mumford [d'après Ehud Hrushovski], Séminaire Bourbaki, 52ème année, 1999-2000, n° 870, Mars 2000.

[9] S.Buechler, **Essential Stability Theory**, Springer 1996.

[10] Z.Chatzidakis, Groups definable in ACFA, in **Algebraic Model Theory** edited by B.T.Hart et al., Kluwar Academic Publisher, 1997.

[11] Z.Chatzidakis, A Survey on the Model Theory of Differnce Fields, in **Model Theory, Algebra, and Geometry**, MSRI Publications, vol 39, 2000.

[12] F.Delon, Separably Closed Fields, in **Model Theory and Algebraic Geometry**, LNM 1696, Springer 1998.

[13] 福崎賢治, Model Theoretic Version of Weil's Theorem ロジックと代数幾何 — モーデル-ラング予想をめぐって —, 2000 年 3 月城崎福祉会館, 講義録.

[14] M.Hindry, Introduction to abelian varieties and the Mordell-Lang conjecture, in **Model Theory and Algebraic Geometry**, LNM 1696, Springer 1998.

[15] W.Hodges, **Model Theory, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 42,** Cambridge University Press, 1993.

[16] E.Hrushovski, Locally modular regular types, p.132-164, LNM 1292, Springer

[17] E.Hrushovski, A new strongly minimal set, Ann. Pure Appl. Logic, vol. 62 (1993), 147-166.

[18] E.Hrushovski, Strongly minimal expansions of algebraically closed fields, Israel J. Math. vol 79 (1992), pp.129-151.

[19] E.Hrushovski, The Mordell-Lang conjecture for function fields, Journal of the American Mathematical Society, vol. 9, Num. 3, 1996, pp.667-690.

[20] E.Hrushovski, Model Theory and a conjecture of Tate and Voloch, in **Model Theory at Tokai, Fall '97**, Department of Mathematical Sciences, Tokai University, 1997.

[21] E.Hrushovski, Geometric Model Theory, Documenta Mathematica Extra Volume ICM 1998 I pp.281-302.

[22] E.Hrushovski, Proof of Manin's theorem by reduction to positive characteristic, in **Model Theory and Algebraic Geometry**, LNM 1696, Springer 1998.

[23] E.Hrushovski, The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields, Annals of Pure and Applied Logic 112 (2001) 43-115.

[24] E.Hrushovski and A.Pillay, Weakly normal groups, in **Logic Colloquium '85**, North Holland 1987, 233-244.

[25] E.Hrushovski and B.Zilber, Zariski Geometries, Journal of the American Mathematical Society, vol. 9, Num. 1, 1996, pp.1-56.

[26] E.Hrushovski and B.Zilber, Zariski Geometries, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 28, Num. 2, 1993, p.315-323.

[27] K.Ikeda, Minimal, but not strongly minimal structures with arbitrary finite dimensions, Journal of Symbolic Logic, vol. 66, 2001, p.117-126

[28] M. Itai, Mathematical Logic and Diophantine Geometry — E. Hrushovski's work, Sugaku Expositions, vol 15, no. 1, June 2002, p.107-123

[29] 桔梗宏孝，Geometric Mordell-Lang Conjecture ロジックと代数幾何 — モーデル-ラング予想をめぐって —，2000 年 3 月城崎福祉会館，講義録.

[30] S.Lang, **Number Theory III: Diophantine Geometry**, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Springer, 1991.

[31] B.Mazur, Abelian varieties and the Mordell-Lang conjecture in **MSRI Publications** vol 39, 2000.

[32] A.Pillay, Model Theory and Diophantine Geometry, Bulletin of the American Mathmatical Society, vol. 34, Num. 4, 1997 pp.405-422.

[33] A.Pillay, ACFA and the Manin-Mumford conjecture, in **Algebraic Model Theory** edited by B.T.Hart et al., Kluwar Academic Publisher, 1997.

[34] A.Pillay, Model theory of algebraically closed fields, in **Model Theory and Algebraic Geometry**, LNM 1696, Springer 1998.

[35] A. Pillay, M. Ziegler, Jet spaces of varieties over differential and difference fields, preprint, 2002.

[36] B. Poizat, **Cours de Théorie des Modèlles** Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, 1985.

[37] B.Poizat, **Groupes Stables** Nur Al-Mantiq Wal-Mar'ifah, 1987.

[38] T.Scanlon, p-adic distance from torsion points of semi-abelian varieties, Journal für dir Reine und Angewandte Mathematik 499 (1998), 225-236.

[39] A.Weil, **Courbes algébriques et variétés abéliennes**, Hermann, 1971.

[40] C.Wood, Differentially closed fields, in **Model Theory and Algebraic Geometry**, LNM 1696, Springer 1998.

[41] 米田郁生, Zariski geometries in differentially closed fields with characteristic zero, ロジックと代数幾何 — モーデル-ラング予想をめぐって —, 2000 年 3 月城崎福祉会館, 講義録.

[42] 米田郁生, Definable fields of finite Morley rank in differentially closed fields with characteristic zero, ロジックと代数幾何 — モーデル-ラング予想をめぐって —, 2000 年 3 月城崎福祉会館, 講義録.

[43] E. フルショフスキー・インタビュー, 数学セミナー 1998 年 1 月号.

索引

■数字・記号

0-定義可能 *38*
0-閉集合 *195*
1-基底群 *251, 253*
1-基底的理論 *108*
2 次形式 *48*

■アルファベット

$A \preceq B$ *264*
$\bar{a}$-閉集合 *195*
ACFA *260*
ACF_p *3*
$\mathrm{acl}(A)$ *264*
Ax の定理 *34*
A 上定義可能 *197*

Bézout の定理 *235*
Borel 部分群 *126*
A.Buium *253*

$\mathrm{cb}(p) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$ *106*
Chevalley の定理 *186, 255*
Chow の定理 *235, 242*

DCF *247*
$\mathrm{Diag}(A)$ *265*
$\mathrm{Diag}_0(A)$ *265*
divisible *268*

E. Artin *137*
$\mathrm{End}(A)$ *138*
Euler の等式 *44*
Euler の補題 *44*

Faltings の定理 *251*
Fermat の小定理 *49*
Frobenius 準同型 *248*
f は n を法として 0 を表す *48*
f は $\mathbb{Q}$ で 0 を表す *48*

G_{aff} *160*
Γ-不変 *141*
generic *269*
$\mathrm{GL}_2(K)$ *160*

Hasse-Minkowski (1) *48*
Hasse-Minkowski (2) *49*
Hensel の定理 *260*
Hilbert 既約性定理 *36*
Hilbert 体 *36*
Hilbert 第 17 問題 *16*
Hilbert 零点定理 *1*

Julia Robinson *46*

κ-範疇的理論 *95*
κ-飽和 *266*
König の補題 *79*
Krull 次元 *84*

Lagrange の 4 平方数定理 *44*
λ-範疇的 *12*
Lang 予想 *251*
Legendre の記号 *47*
Lindström のテスト *12*
Liouville 関数 *57*
Liouville 数 *57*

Macintyre の定理 *144*
Manin-Buium 写像 *256*
Manin-Mumford 予想 *252*
Möbius 変換 *171*
Mordell-Weil の定理 *252*
Mordell の定理 *251*
Morley 次数 *78*

n-推移的 *158*

ω-安定理論 86

p-進整数環 56
p-進体 56
$\mathbb{P}^1(K)$ 160
$\mathrm{PGL}_2(K)$ 160
Π_2-理論 4
B.Poizat 43

RCF 18
Reinecke の定理 145, 158, 163
Riemann 球 170
Robinson の判定法 10

SCF_p 249
Schanuel 予想 58
Skolem 化 264
Skolem 関数 93, 265
Skolem 閉包 93, 265
Sokolovic の定理 257
Steinitz の定理 4
Stone 空間 265

T_a 226
T_a-閉集合 226
Tarski-Vaught の判定法 11
T_b 226
T_b-閉集合 226
$\mathrm{Th}_{L(A)}(A)$ 265

Vaught 対 96

Weil-Hrushovski-van den Dries の定理 257
Weil の定理 260
Wilkie 57

Zilber 既約性定理 121, 142, 163
Zorn の補題 72

■ア行
アーベル多様体 232, 252
アフィン幾何 69
安定化群 113
一様 72
一般的タイプ 115
一般点 169, 180
陰関数定理 176
上から近似 13
上三角行列 159

■カ行
階数一様行列 210
解析的関数 176
解析的分枝 177
可解群 144
拡大 165
仮想元 38
仮想元を消去する 40
仮想元を弱い意味で消去する 43, 205
傾き 176
加法的 p-進付値 56
可約 268
完全体 23
冠頭標準形 263
完備 227
完備なザリスキー幾何 185
幾何 66
幾何的 Mordell-Lang 予想 137, 183, 252, 253
擬コンパクト集合 184
軌跡 184, 202, 203
基底 66
軌道 159, 161
既約 121
既約性の判定 141
既約成分 183
既約閉集合 183
強極小構造 64
強極小集合 186

強極小集合に作用する群 156
強極小性 41
極 230
局所 Morley 階数 75
極小構造 64
極小タイプ 249
局所化 66
局所モジュラー 68, 156
曲線 239
群自己同型作用 141
群図表 137, 146, 180, 210, 250
降下法 45
交換子群 144
交換子列 144
交換法則 65
固定化群 159
固定群 159
固定体 260
孤立タイプ 265
コンパクト性定理 6, 33

■サ行

作用 141
ザリスキー位相 183
ザリスキー幾何 182, 183, 185
ザリスキー幾何における Chevalley の定理 192
ザリスキー幾何の特殊化 201
ザリスキータイプ 249
次元 67, 184
次元定理 185, 188, 204
次数 239
実現する 266
実体 17
実閉体 17
射 208
射影 185
射影幾何 69
射影空間 227
射影多様体の完備性 28
射影平面 137
弱完備性 228
弱リーマン-ロッホ 232
終結式 13
自由変数 263
種数 232
順序体 17
順序を定義しない 86
純粋性 235
純非分離的 248
初等拡大列 7
初等的 71
初等同値 264
初等部分構造 264
初等部分モデル 2
推移性 90
数体 252
正規列 144
制限 172
正則 158, 203
正則点 203
正量記号消去 27
線形多様体 173
線形である 107
相互定義可能性 147
相対化 97
束縛変数 263

■タ行

大域 Morley 階数 77
第一階 Lefschetz 原理 33
対角写像 185
対称性 91
代数群 208
代数的素モデル 29
代数的な論理式 64, 264

代数的閉体 69
代数的閉包の存在 33
体の純粋性 226
体のモデル理論 262
タイプ 265
タイプの Morley 階数 79
タイプの定義可能性 149
タイプは定義可能 86
楕円曲線 251
単純理論 260
単調性 90
中間値の定理 62
中国剰余定理 48
忠実 141
中心化群 112
超準解析 200
超準モデル 200
強い意味で n-推移的 158
定格的 88
定義体 43
定数写像 185
定数体 247
デザルグの定理 137
同値な群図表 154
等分点 252
特殊化 201, 202, 210
特殊仮想元 205
独立 66
独立である 90

■ナ行

滑らかな代数曲線 194
ネーター位相 111, 183
捩れ群 252

■ハ行

半直積 138
反転 168
万有モデル 78, 266
非可算範疇的理論 95
非常に豊富なザリスキー幾何 246
非分岐拡大 87
微分次数 247
微分体 246
微分代数 253
微分多項式 247
微分多項式環 247
微分閉体 247, 254
非分離次数 248
標準因子 232
標準仮想パラメーター 38
標準基底 38, 105, 154
標準実パラメーター 39
標準部分写像 201
文 263
分岐拡大 87
分離次数 248
分離閉体 248, 254
分離閉包 248, 254, 258
平行移動 165
閉写像 230
平方剰余の相互法則 47
冪零元 14
部屋割り論法 44
偏角の原理 179
豊富なザリスキー幾何 210, 254
ほとんど有限対 1 190

■マ行

前幾何 66
芽 149
モデル完全 4
モデル完全性 2
モデル完全な理論の特徴付け 8

■ヤ行

ヤコビ多様体　*232, 252*
有限基底性　*91*
有限ランク　*252*
有理 2 次形式　*48*
有理写像　*230*
良い還元　*260*
良い特殊化　*204*

■ラ行

ランク有限　*251*
量記号消去　*192*
量記号を消去　*20*
例外的　*202*
零点　*232*
連結成分　*112, 113*
論理式　*262*

■ワ行

和積標準形　*22*

板井 昌典 (いたい・まさのり)

略歴

1953 年　広島県に生まれる.
1978 年　神戸大学理学部数学科を卒業.
1989 年　イリノイ大学大学院修了. Ph.D.
現　在　東海大学理学部情報数理学科助教授.

専門はモデル理論 (数学基礎論).

幾何的モデル理論入門/モデル理論の代数，数論幾何への応用
(きかてきもでるりろんにゅうもん もでるりろん だいすう すうろんきか おうよう)

2002 年 9 月 15 日　第 1 版第 1 刷発行

著　者　板　井　昌　典
発行者　林　　克　行
発行所　株式会社 日　本　評　論　社
〒170-8474 東京都豊島区南大塚 3-12-4
電話　(03) 3987-8621 [販売]
(03) 3987-8599 [編集]
印　刷　精文堂印刷株式会社
製　本　牧製本印刷株式会社
装　釘　林 健造

Printed in Japan
ISBN 4-535-78327-6